

1. Pokaż że spójna i przemieniana grupa Liego jest produktem pewnej ilości prostych i okręgów.

Wskazówka: Najpierw pokaż że $\exp$ jest homomorfizmem na podgrupę otwartą. Potem opisz jądro.

2. Pokaż że jeśli I_1 i I_2 są ideałami w algebrze Liego B , zaś A_1 i A_2 są podalgebrami to $I_1 + I_2$, $I_1 \cap I_2$ i $[I_1, I_2]$ są ideałami zaś $I_1 + A_1$ i $A_1 \cap A_2$ są podalgebrami.

3. Przypominam że dla x z algebry Liego A operator ad_x jest zdefiniowany wzorem $\text{ad}_x(y) = [x, y]$. Wyznacz wartości i wektory własne operatora ad_x dla A będącego algebrą macierzy n na n i x będącego macierzą diagonalną. Pokaż że w algebrze $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ macierzy rzeczywistych o śladzie 0 nie ma podprzestrzeni niezmienniczych różnych od całej algebry i $\{0\}$ wspólnych dla wszystkich operatorów ad_x .

Komentarz: Takie algebry nazywamy algebrami prostymi.

4. Sprawdź że suma prosta algebr Liego A_1 i A_2 zdefiniowana jako ich suma prosta jako modułów z nawiasem Liego po składowych $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$ jest algebrą Liego. Sprawdź że jeśli B jest R -liniowym odwzorowaniem z A_1 w różniczkowania A_2 spełniającym $B([x, y]) = B(x)B(y) - B(y)B(x)$ (tzn. B jest homomorfizmem algebr Liego) to wzór

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], -(B(y_1))x_2 + (B(x_1))y_2 + [y_1, y_2])$$

zadaje nawias Liego na sumie prostej A_1 i A_2 jako modułów. Sumę prostą A_1 i A_2 jako modułów z takim nawiasem Liego nazywamy produktem półprostym algebr Liego. Oczywiście produkt półprosty zależy od wyboru odwzorowania B .

5. Uzasadnij że algebra Liego produktu półprostego grup Liego jest produktem półprostym ich algebr Liego.

6. Pokaż że algebra Liego A jest produktem półprostym wtedy i tylko wtedy gdy A zawiera dwa podmoduły A_1 i A_2 takie że $A = A_1 \oplus A_2$ jako moduł, A_1 jest podalgebrą (tzn. dla $x, y \in A_1$ również $[x, y] \in A_1$) i dla $x \in A$, $y \in A_2$ mamy $[x, y] \in A_2$.

7. Pokaż że jeśli rzeczywista algebra Liego A zawiera element x taki że ad_x ma niezerową rzeczywistą wartość własną, to zawiera też podalgebrę Liego izomorficzną z algebrą Liego grupy przekształceń afinicznych prostej (grupy 'ax + b').

8. Niech G będzie grupą operatorów liniowych na $C^\infty(\mathbb{R})$ generowaną przez operatory przesunięcia i operatory mnożenia przez funkcje postaci $\exp(iP(x))$ gdzie P jest dowolnym wielomianem rzeczywistym stopnia nie przekraczającego ustalonego n . Przedstaw G i algebrę Liego G jako produkt półprosty. Uzasadnij że dla $n = 1$ algebra Liego G jest izomorficzna z algebrą Liego grupy Heisenberga. Uzasadnij że w algebrze Liego G wszystkie operatory ad_x są nilpotentne, tzn. istnieje takie m że $\text{ad}_x^m = 0$.

Komentarz: Podobna konstrukcja ma sens na $\mathbb{R}^k$.