

Podaję definicje: Centrum grupy G to zbiór takich elementów $z \in G$ że dla każdego $x \in G$ zachodzi $xz = zx$. Centrum algebry Liego $\mathfrak{g}$ to zbiór takich elementów $Z \in \mathfrak{g}$ że dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ zachodzi $[X, Z] = 0$.

1. Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Uzasadnij że jeśli centrum $\mathfrak{g}$ jest trywialne to centrum G jest dyskretne.

2. Uzasadnij że dyskretna podgrupa normalna spójnej grupy Liego G jest zawarta w centrum G .

3. Podobnie do rzeczywistych grup Liego można zdefiniować zespolone grupy Liego: różniczkowalność jest w sensie zespolonym, algebra Liego jest nad liczbami zespolonymi. Uzasadnij że dla zespolonych grup Liego jeśli homomorfizm algebr odpowiadający gładkiemu homomorfizmowi jest zespolony to homomorfizm grup jest holomorficzny (różniczkowalny w sensie zespolonym). Podaj przykład gładkiego homomorfizmu zespolonych grup Liego który nie jest holomorficzny.

4. Niech $H \subset G$ będzie podgrupą Liego. Zakładamy że G i H są spójne. Uzasadnij że jeśli algebra Liego H jest ideałem w G to automorfizmy wewnętrzne G działają w sposób ciągły na H . Podobnie, jeśli dodatkowo G i H są grupami zespolonymi (przy tym włożenie H w G jest holomorficzne) to automorfizmy wewnętrzne G działają w sposób holomorficzny na H .

Wskazówka: Użyj odwzorowanie wykładnicze by pokazać najpierw ciągłość w jedynce a potem prawe przesunięcia by dostać ciągłość w dowolnym punkcie.

Definicja: Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest prosta jeśli jest nieprzemienna i jedyne podprzestrzenie (podmoduły) $\mathfrak{g}$ niezmiennicze na działanie wszystkich operatorów ad_x , $x \in \mathfrak{g}$ to $\mathfrak{g}$ i $\{0\}$.

5. Pokaż że jeśli G jest grupą Liego z prostą algebrą Liego, to istnieje k takie że dla każdego $x \in G$ który nie należy do centrum G dla F zadanego równością $F = A_G x = \{gxg^{-1} : g \in G\}$ zbiór $(FF^{-1})^k$ zawiera otoczenie e w G .

Wskazówka: F zawiera krzywą gładką, FF^{-1} zawiera krzywą gładką przechodzącą przez e i mającą niezerowy wektor styczny w e .

6. Pokaż że jeśli G jest spójną grupą Liego z prostą algebrą Liego, to każdy właściwy dzielnik normalny G jest zawarty w centrum G .

7. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad ciałem k charakterystyki 0. Zakładamy że D jest nilpotentnym różniczkowaniem $\mathfrak{g}$. Nilpotentnym oznacza tu że D jest operatorem nilpotentnym, tzn. istnieje takie k że $D^k = 0$. Uzasadnij że wzór

$$\exp(tD) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tD)^k}{k!}$$

definiuje jednoparametrową grupę automorfizmów $\mathfrak{g}$, tzn. $\exp(t_1D)\exp(t_2D) = \exp((t_1 + t_2)D)$ i przy ustalonym $t \in k$ odwzorowanie $\exp(tD)$ jest automorfizmem $\mathfrak{g}$.

8. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad pierścieniem z jedynką R i niech D będzie endomorfizmem $\mathfrak{g}$ jako R -modułu. Niech $\tilde{\mathfrak{g}}$ równa się $R \oplus \mathfrak{g}$ jako R -moduł. Na $\tilde{\mathfrak{g}}$ wprowadzamy operację $[\cdot, \cdot]$ wzorem

$$[(t, x), (s, y)] = (0, tDy - sDx + [x, y]).$$

Uzasadnij że D jest różniczkowaniem $\mathfrak{g}$ wtedy i tylko wtedy gdy powyższa operacja zadaje nawias Liego (tzn. $\tilde{\mathfrak{g}}$ jest algebrą Liego). Wskazówka: Połowa wynika z zadania z poprzedniej listy.

9. Niech $\tilde{R} = R[X]/(X^2)$ (tzn. $\tilde{R}$ jest rozszerzeniem R o element x taki że $x^2 = 0$), L jest R -algebrą Liego i niech $\tilde{L}$ będzie zbiorem formalnych sum postaci $a + xb$ gdzie $a, b \in L$ z naturalnymi działaniami. Sprawdź że $\tilde{L}$ jest algebrą Liego nad $\tilde{R}$. Pokaż że jeśli D jest różniczkowaniem L , to wzór $A(s + xt) = s + x(t + D(s))$ gdzie $s, t \in L$ (zaś L utożsamiamy z podzbiorem $\tilde{L}$), zadaje automorfizm $\tilde{L}$. Ponadto, każdy automorfizm $\tilde{L}$ który jest tożsamością na $\tilde{L}/xL$ jest takiej postaci.