

1. Uzasadnij że

$$\exp([X, Y]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(-X/n) \exp(Y/n) \exp(X/n) \exp(-Y/n))^{n^2}.$$

Wskazówka: Postępując jak w notatkach z wykładu 3 można obliczyć pochodną $\partial_s \partial_t \exp(-sX) \exp(tY) \exp(sX) \exp(-tY)$. Wzór wyżej dostaniemy wtedy stosując rozwinięcie Taylora.

2. Pokaż że dla zespolonych grup Liego zachodzą twierdzenia o podgrupie i homomorfizmie podane na wykładzie: jeśli mamy zespoloną podalgebrę to podgrupa jest zespolona, jeśli homomorfizm algebr jest zespolony to homomorfizm grup jest holomorficzny (różniczkowalny w sensie zespolonym).

3. Uzasadnij że centrum Z grupy Liego G jest podgrupą Liego. Pokaż że jeśli G jest spójna to algebra Liego Z to centrum algebry Liego G .

4. Które z następujących grup są jednospójne: grupa Heisenberga, grupa $SL(2, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1, grupa $SU(2)$ unitarnych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1, grupa $SO(3)$ ortogonalnych macierzy 3 na 3 o wyznaczniku 1, grupa $SL(2, \mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1, grupa $SL(3, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 3 na 3 o wyznaczniku 1. Dla grup które nie są jednospójne opisz centrum grupy nakrywającej (jednospójnej grupy z tą samą algebrą).

Wskazówka: Macierze można zapisać w postaci OL gdzie O jest ortogonalne lub unitarne, zaś L jest macierzą trójkątną.

5. Pokaż że jeśli G jest grupą zwartą, U jest otoczeniem e w G , k jest liczbą naturalną, to istnieje otoczenie jedynek V takie że $((A_G V)(A_G V)^{-1})^k \subset U$.

6. Pokaż że jeśli G_1 jest grupą Liego z prostą algebrą Liego zaś G_2 jest grupą zwartą to każdy (algebraiczny) homomorfizm z G_1 do G_2 jest ciągły.

7. Przestrzeń rzutowa $P(K, n)$ nad ciałem K to iloraz $K^{n+1} - 0$ w którym utożsamiamy x z λx dla dowolnego $\lambda \neq 0$. Macierze $n+1$ na $n+1$ nad K w naturalny sposób działają na $P(K, n)$. Wyznacz orbity działania $SL(2, \mathbb{R})$ i macierzy górnotrójkątnych na $P(\mathbb{C}, 1)$. Pokaż że macierze górnotrójkątne działają tranzytywnie na orbitach $SL(2, \mathbb{R})$ maksymalnego wymiaru.

8. Przestrzeń jednorodną grupy G nazywamy przestrzenią na której G działa tranzytywnie. Przedstaw przestrzenie rzutowe i sfery jako przestrzenie jednorodne.