

1. Pokaż że algebra Heisenberga, algebra grupy z zadania 8 z Listy 3 i algebra macierzy górnorójkątnych z zerami na diagonalu są nilpotentne. Pokaż że algebra grupy przekształceń afinicznych prostej, grupy izometri płaszczyzny, algebra macierzy górnorójkątnych i algebra z zadania 9 Listy 2 są rozwiązalne.

2. Uzasadnij że algebra prosta nie jest rozwiązalna.

3. Uzasadnij że spójna grupa Liego jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy jej algebra Liego jest nilpotentna.

4. Indukcyjnie uzasadnij że $\mathfrak{g}^k$ i $\mathfrak{g}_k$ zdefiniowane przed definicjami algebr rozwiązalnych i nilpotentnych są ideałami w $\mathfrak{g}$.

5. Uzasadnij że każda podalgebra i każdy iloraz przez ideał algebry rozwiązalnej (czy nilpotentnej) jest rozwiązalny (odpowiednio nilpotentny). Uzasadnij że algebra która ma rozwiązalny ideał taki że iloraz przez ten ideał jest rozwiązalny jest algebrą rozwiązalną.

6. Uzasadnij że rozwiązalna algebra Liego $\mathfrak{g}$ zawiera ideał abelowy $\mathfrak{a}$. Uzasadnij że skończenie wymiarowa rozwiązalna algebra Liego nad ciałem liczb rzeczywistych wymiaru co najmniej 2 zawiera podalgebrę (rozwiązalną) wymiaru 2 lub wymiaru 3. Uzasadnij że jeśli $\mathfrak{g}$ jest nieprzemienna to algebrę wyżej można wybrać tak by była ona nieprzemienna. Opisz (sklasyfikuj) wszystkie rozwiązalne algebry Liego nad ciałami liczb rzeczywistych i zespolonych o wymiarze nie przekraczającym 3.

Wskazówka: W drugim i trzecim punkcie rozważ działanie ad na $\mathfrak{a}$. Jeśli jest ono trywialne rozważ $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

7. Pokaż że skończenie wymiarowa rozwiązalna algebra Liego nad ciałem zawiera ideał kowymiaru 1. Wywnioskuj stąd że taka algebra Liego jest iterowanym produktem półprostym algebr jednowymiarowych. Podobnie, jednospójna grupa Liego z rozwiązalną algebrą Liego jest iterowanym produktem półprostym prostych.

Wskazówka: Każda podprzestrzeń zawierająca $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem.

8. Uzasadnij że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy ma nietrywialne centrum $\mathfrak{z}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ jest nilpotentna. Sformułuj i udowodnij analogiczny warunek dla grup.

9. Pokaż że jeśli algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna i $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest generowane przez $x_1, \dots, x_n$ to $x_1, \dots, x_n$ także generują $\mathfrak{g}$.

Wskazówka: Indukcyjnie pokaż że $x_1, \dots, x_n$ generują $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_i$ dla dowolnego $i \geq 1$.

10. Pokaż że nilpotentna algebra Liego ze skończonym zbiorem generatorów jest skończenie wymiarowa.