

1. Pokaż że skończenie wymiarowa algebra Liego A nad ciałem zawiera maksymalny ideał rozwiązalny.

Wskazówka: Uzasadnij że gdy I_1 i I_2 są ideałami rozwiązalnymi w A to $I_1 + I_2$ jest ideałem rozwiązalnym.

2. Uzasadnij że jeśli A jest skończenie wymiarową rozwiązalną algebra Liego nad ciałem charakterystyki 0, D jest różniczkowaniem A to operator $\text{ad}_{D(y)}$ jest nilpotentny dla dowolnego $y \in A$.

Wskazówka: Użyj wynik o nilpotentności $[A, A]$ dla odpowiedniej algebry pomocniczej.

3. Pokaż że jeśli N_1 i N_2 są nilpotentnymi ideałami to również $N_1 + N_2$ jest ideałem nilpotentnym. Wywnioskuj stąd że algebra Liego A skończonej długości (skończnie wymiarowa jeśli pierścień podstawowy to ciało) zawiera maksymalny ideał nilpotentny, tzn. taki ideał nilpotentny N że dowolny ideał nilpotentny A jest zawarty w N .

Wskazówka: Jeśli N jest ideałem nilpotentnym w A to $[A, N_k] \subset N_k$, gdzie N_k to ciąg z definicji algebry nilpotentnej.

4. Niech ciało K będzie algebraicznym domknięciem ciała p -elementowego gdzie p jest liczbą pierwszą. Rozważmy przestrzeń wektorową V nad K wymiaru p z bazą e_i , $i = 0, \dots, p-1$. Operator X definiujemy wzorem $Xe_i = ie_{i-1}$ (w szczególności $Xe_0 = 0$). Operator Y definiujemy wzorem $Ye_i = e_{i+1}$ dla $i < p-1$ i $Ye_{p-1} = e_0$. Sprawdź że X i Y generują nilpotentną algebrę N endomorfizmów V . Sprawdź że N nie ma wspólnego wektora własnego.

Uwaga: Oznacza to że w twierdzeniu Liego i w lemacie o reprezentacjach algebr nilpotentnych założenie charakterystyki 0 jest istotne.

5. Niech V będzie przestrzenią wielomianów nad $\mathbb{R}$ jednej zmiennej x . Na V rozpatrujemy operatory $X = \partial_x$ oraz $M_p(q) = pq$ dla $p \in V$. Niech V_k będzie przestrzenią wielomianów stopnia nie przekraczającego k . Niech A_k będzie algebra Liego generowaną przez X i V_k zaś $A = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_k$.

Uzasadnij że A_k jest ideałem nilpotentnym w A . Uzasadnij że A nie zawiera maksymalnego ideału nilpotentnego.

6. Rozważmy przestrzeń V i algebrę A_1 w notacji z poprzedniego zadania. V jest modulem Liego nad A_1 . Uzasadnij że V nie zawiera niezerowych podmodułów Liego różnych od V (czyli V jest modulem prostym). W szczególności elementy A_1 nie mają wspólnego wektora własnego.

7. Niech A będzie algebra Liego nieskończonych macierzy górnotrójkątnych o elementach wymiernych z zerami na diagonalu i mających tylko skończenie wiele niezerowych elementów. Uzasadnij że każdy element A zadaje nilpotentny operator liniowy, ale A nie jest nilpotentna.

Definicja: Długością nilpotentnej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy minimalne k gdzie k jest numerem $\mathfrak{g}_k = 0$ w definicji nilpotentności.

8. Pokaż że dla danego n i k istnieje wolna algebra nilpotentna $N_{n,k}$ długości co najwyżej k generowana przez n elementów. Dokładniej, $N_{n,k}$ jest taką algebra Liego że dla dowolnej nilpotentnej algebry Liego B długości co najwyżej k i odwzorowania h ze zbioru generatorów $\{x_1, \dots, x_n\}$ w B istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{h} : N_{n,k} \rightarrow B$ takie że $h(x_i) = \tilde{h}(x_i)$. Dla skończonego n algebra $N_{n,k}$ jest skończenie wymiarowa.

Uwaga: Nilpotentność jest kluczowa żeby dostać skończony wymiar. Mianowicie, algebra A z zadania 8 z listy 2 jest nieskończenie wymiarową rozwiązalną algebra Liego o dwu generatorach. Przy tym $[A, A]$ jest algebra przemianą (takie algebry nazywamy metaabelowymi).

9. Algebra Liego $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ jest generowana przez elementy H, X, Y takie że $H = [X, Y]$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Niech v_k , $k = 0, \dots, m$ będzie bazą przestrzeni $m+1$ wymiarowej przestrzeni V_m ($m \geq 1$). Sprawdź że wzory $Hv_k = (2k - m)v_k$, $Xv_k = (m - k)v_{k+1}$, $Yv_k = kv_{k-1}$ zadają na V_m strukturę modułu Liego nad $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Moduł ten jest izomorficzny z naturalnym działaniem $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ na wielomianach jednorodnych stopnia m . Ponadto moduł ten jest prosty (tzn. nie zawiera niezerowych podmodułów Liego różnych od siebie).

10. Algebra Liego $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ składa się z macierzy antysymetrycznych wymiaru $n \times n$. Sprawdź że podalgebra $\mathfrak{c}$ algebry $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ składająca się elementów mających postać blokowo-diagonalną z blokami 2×2 na diagonalu jest maksymalną podalgebrą przemianą w $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$. Znajdź wspólne wektory własne dla $\mathfrak{c}$ działającego na $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ za pomocą ad . Sprawdź że nietrywialne przestrzenie pierwiastkowe V_λ dla $\lambda \neq 0$ są jednowymiarowe i że $V_0 = \mathfrak{c}$. Sprawdź że $[V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}] \subset V_{\lambda_1 + \lambda_2}$. Zilustruj geometrycznie możliwe λ dla $n = 3, 4, 5$ (niestety, dla parzystych n dopiero $n = 10$ reprezentuje ogólny przypadek). Sprawdź że $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ jest sumą prostą dwu podalgebr izomorficznych z $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.