

1. Niech ciało K będzie ciałem p -elementowym gdzie p jest liczbą pierwszą. Rozważmy przestrzeń wektorową V nad K wymiaru p z bazą e_i , $i = 0, \dots, p-1$. Operator X definiujemy wzorem $Xe_i = ie_i$ (w szczególności $Xe_0 = 0$). Operator Y definiujemy wzorem $Ye_i = e_{i+1}$ dla $i < p-1$ i $Ye_{p-1} = e_0$. Sprawdź że X i Y generują rozwiązalną algebrę A endomorfizmów V . Sprawdź że istnieje element $[A, A]$ który nie jest operatorem nilpotentym.

2. Pracujemy nad ciałem liczb wyiernych $\mathbb{Q}$. niech $p(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ będzie wielomianem nieprzywiedlnym stopnia n . Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Q}$ z bazą e_i , $i = 0, \dots, n-1$. Operator Y definiujemy wzorem $Ye_i = e_{i+1}$ dla $i < n-1$, zaś $Ye_{n-1} = a_{n-1}e_{n-1} + \dots + a_0e_0$. V traktujemy jako przemienną algebrę Liego i niech A będzie produktem półprostym algebry jednowymiarowej $\mathbb{Q}y$ z V gdzie element bazowy y algebry jednowymiarowej działa na V jako Y . Uzasadnij V jako ideał w A ma strukturę modułu Liego nad A , uzasadnij że jest to moduł prosty. Niech K będzie algebraicznym domknięciem $\mathbb{Q}$. Opisz strukturę V_K jako modułu Liego.

3. Opisz strukturę $S \otimes_R G$ jeśli R to liczby rzeczywiste zaś S to liczby zespolone. W szczególności, co wyjdzie jeśli G to:

- algebra rzeczywistych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy antyhermitowskich 2×2 o śladzie 0

4. Uzasadnij że jeśli A jest algebrą jednowymiarową (tzn. modułem wolnym nad R z jednym generatorem) to A jest przemienna zaś $U(A)$ jest izomorficzne z pierścieniem wielomianów jednej zmiennej.

5. Pokaż że jeśli algebra Liego A jest sumą prostą algebr A_1 i A_2 , to algebra obwiednia $U(A)$ jest izomorficzna z iloczynem tensorowym $U(A_1)$ i $U(A_2)$ z działaniem zadanym wzorem $(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (x_1y_2) \otimes (y_1y_2)$.

6. Produkt wolny R -algebr Liego A_1 i A_2 definiujemy jako taką R -algebrę Liego B z włożeniami $\iota_i : A_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$ że dla dowolnej R -algebry Liego C i dowolnych homomorfizmów R -algebr Liego $h_i : A_i \rightarrow C$, $i = 1, 2$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm R -algebr Liego $h : B \rightarrow C$, taki że $h_i = h \circ \iota_i$. Uogólnij definicję na dowolną, niekoniecznie skończoną rodzinę algebr. Uzasadnij że produkt wolny istnieje i jest jednoznaczny z dokładnością do izomorfizmu. Ponadto pokaż że produkt wolny odpowiedniej liczby kopii pierścienia R traktowanego jako R -algebra Liego z zerowym komutatorem spełnia naturalną definicję wolnej algebry Liego (sformułuj tę definicję).

7. Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego L , i niech D będzie algebrą operatorów różniczkowych na G niezmienniczych na przesunięcia z prawej strony (mnożenie to składanie operatorów). Pokaż że algebra obwiednia $U(L)$ jest izomorficzna z D .

Wskazówka: Rozpatrz działanie elementów D na jednomianach w układzie współrzędnych.

8. Rozważmy uniwersalną algebrę obwiednią dla algebry Heisenberga i algebry "ax + b" nad ciałem charakterystyki 0. Uzasadnij że centrum uniwersalnej algebry obwiedniej algebry Heisenberga to uniwersalna algebra obwiednia centrum algebry Heisenberga. Uzasadnij że centrum uniwersalnej algebry obwiedniej algebry "ax + b" jest trywialne (tzn. redukuje się do ciała podstawowego).

Wskazówka: Rozważ działanie elementów bazy algebry na elementach bazy uniwersalnej algebry obwiedniej. Przy naturalnym wyborze baz efekt działania będzie wielokrotnością innego elementu bazy algebry obwiedniej.

9. Niech A będzie algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 generowaną przez elementy S , X i Y , taką że $[X, Y] = 0$, $[S, X] = Y$, $[S, Y] = -X$. Uzasadnij że centrum uniwersalnej algebry obwiedniej $U(A)$ jest generowane przez element $X^2 + Y^2$.