

Definicja: Formę dwuliniową B na algebrze Liego A nazywamy niezmienniczą jeśli dla każdych $x, y, z \in A$ zachodzi $B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$.

1. Pokaż że jeśli A jest algebrą Liego spójnej grupy Liego G to forma dwuliniowa B na A jest niezmiennicza na A wtedy i tylko wtedy gdy jest niezmiennicza na działaniu Ad . Wywnioskuj stąd że jeśli G jest zwarta to na A istnieje dodatnio określony niezmienniczy iloczyn skalarny.

2. Pokaż że jeśli B jest dwuliniową formą niezmienniczą na A , zaś I jest ideałem w A , to zbiór $I^\perp = \{x \in A : \forall y \in I B(x, y) = 0\}$ jest ideałem. Wywnioskuj stąd i z poprzedniego zadania że jeśli podalgebra S algebry Liego zwartej grupy Liego jest rozwiązalna, to S jest przemienna.

Zadania 3 do 10 stanowią cykl ilustrujący użycie algebr Liego do badania grup (głównie nilpotentnych) które nie są grupami Liego.

3. Niech X będzie zbiorem, N będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Q}$ z bazą X , $T[[N]] = \prod_n N^{\oplus n}$ będzie uzupełnieniem algebry tensorowej, $LV[[N]]$ będzie uzupełnieniem podalgebry Liego $T[[N]]$ generowanej przez N . W $LV[[N]]$ wprowadzamy mnożenie wzorem Campbell-Bakera-Hausdorffa, tzn

$$xy = \log(\exp(x)\exp(y))$$

gdzie po prawej stronie mamy mnożenie w $T[[N]]$. Pokaż że podgrupa G grupy otrzymanej z $LV[[N]]$ z tym działaniem, generowana przez X jest grupą wolną, tzn. dowolne odwzorowanie X w grupę H przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu G w H .

Wskazówka: Pokaż że każdy element G może być jednoznacznie zapisany w postaci $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ gdzie $x_i \in X$, $x_i \neq x_{i+1}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \neq 0$. Dla jednoznaczności rozwiń $\exp(k_i x_i)$ w szereg i zauważ że produkt szeregów nie może być równy 1.

4. Niech L będzie nilpotentną algebrą Liego stopnia nilpotentności l nad pierścieniem R takim że $l!$ jest odwracalne w R . Wtedy szereg Campbell-Bakera-Hausdorffa daje dobrze zdefiniowane mnożenie w L . Pokaż że jeśli I jest ideałem w L to względem tego mnożenia I jest podgrupą normalną. Odwrotnie, jeśli R jest ilorazem $\mathbb{Z}$ to każda podgrupa normalna L jest tej postaci.

Wskazówka: Niech T będzie podgrupą zaś I generowaną przez nią algebrą i niech $I_1 = I$, $I_{k+1} = [I, I_k]$. Indukcyjnie pokaż że $T + I_k$ jest podmodułem nad $\mathbb{Z}$, i że $I = T + I_k$.

Przypominam definicje: Niech G będzie dowolną grupą zaś M i N będą jej podgrupami. Komutator $[M, N]$ definiujemy jako podgrupę G generowaną przez elementy postaci $ghg^{-1}h^{-1}$ dla $g \in M$, $h \in G_k$. Zstępujący ciąg centralny G_n definiujemy następująco: $G_1 = G$ zaś $G_{k+1} = [G, G_k]$.

5. Sprawdź że jeśli H, M, N są podgrupami normalnymi w G to $[[H, M], N] \subset [[M, N], H][[H, N], M]$

6. Pokaż że G_k jest podgrupą normalną w G i G_k/G_{k+1} leży w centrum G/G_{k+1} (w szczególności G_k/G_{k+1} jest abelowe). Ponadto $[G_k, G_l] \subset G_{k+l}$.

Wskazówka: Ostatni wzór pokazujemy indukcyjnie przy pomocy zadania 5.

7. Niech $W_k = G_k/G_{k+1}$ i $W = \bigoplus_k W_k$. Zakładamy że G jest grupą nilpotentną. Pokaż że na W można zadać strukturę algebry Liego nad $\mathbb{Z}$ tak że dla $[x] \in W_k$, $[y] \in W_l$ mamy $[[x], [y]] = [xyx^{-1}y^{-1}] \in W_{l+k}$.

8. Niech $H = LV[[N]]$ gdzie jak w zadaniu 3 na $LV[[N]]$ mnożenie wprowadzamy wzorem Campbell-Bakera-Hausdorffa i niech γ_l będzie podzbiorem $LV[[N]]$ składającym się z szeregów których składowe jednorodne rzędu mniej-szego niż k są zerami. Niech H_k oznacza elementy zstępującego ciągu centralnego

dla H . Pokaż że $H_k \subset \gamma_k$ i że dla dowolnego $l > k$ zachodzi $(H_k + \gamma_l)/(H_{k+1} + \gamma_l) = LV[N]_k$ gdzie $LV[N]_k$ jest zbiorem elementów $LV[[N]]$ które są tensorami jednorodnymi rzędu k . Ponadto dla grupy G z zadania 3 zachodzi $G_k = G \cap \gamma_k$.

Wskazówka: H/γ_{k+1} jest grupą nilpotentną stopnia nilpotentności k . G_{k+1} leży w jądrze dowolnego homomorfizmu z G w grupę nilpotentną stopnia nilpotentności k .

9. Niech G będzie grupą nilpotentną. Zakładamy dodatkowo że G jest podzielna i beztorsyjna, tzn. dla dowolnego $x \in G$ i całkowitego $n > 0$ istnieje $y \in G$ taki że $y^n = x$. Pokaż że wtedy algebrę Liego W grupy G zdefiniowaną w zadaniu 7 można potraktować jako algebrę Liego nad liczbami wymiernymi zaś G jest izomorficzna z grupą otrzymaną przy pomocy wzoru Campbella-Bakera-Hausdorffa z W . W szczególności takie grupy są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich algebry Liego są izomorficzne.

Wskazówka: Niech X będzie bazą W_1 nad $\mathbb{Q}$. Z zadania 3 wywnioskuj że istnieje homomorfizm z podgrupy $LV[[W_1]]$ generowanej przez W_1 na G . Resztę dostań z zadań 8 i 4.

10. Niech G będzie skończoną p -grupą (tzn. G ma p^k elementów dla pewnego k) stopnia nilpotentności $l < p$. Zauważ że na algebrze Liego W grupy G wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zadaje strukturę grupy i że G jest izomorficzna z W .

Wskazówka: Zadanie 8 pokazuje że G jest ilorazem "wolnej" grupy nilpotentnej stopnia nilpotentności l . Tą grupę można traktować jako podgrupę wolnej algebry nilpotentnej nad pierścieniem $\mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z})$.

Algebrę Liego nazywamy półprostą jeśli nie zawiera nietrywialnych ideałów rozwiązalnych.

11. Pokaż że suma prosta algebr półprostych jest półprosta.

12. Niech ciało F będzie rozszerzeniem algebraicznym ciała K . Pokaż że algebra Liego A nad ciałem K jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy algebra $A_F = F \otimes_K A$ jest półprosta jako algebra Liego nad F .

Wskazówka: Aby pokazać że A_F jest półprosta wystarczy to zrobić w przypadku gdy rozszerzenie F/K jest skończone. Użyj wtedy poprzedniego zadania.

13. Niech A będzie algebrą Liego zaś R będzie maksymalnym ideałem rozwiązalnym w R . Uzasadnij że A/R jest algebrą półprostą.

Nilradykałem $\mathfrak{s}$ algebry Liego L nazywamy podzbiór L taki że każdy element $s \in \mathfrak{s}$ działa jak zero w każdym L -module prostym tzn.

$$\mathfrak{s} = \{s \in L : \forall_V \forall_{v \in V} V \text{ jest prosty} \implies sv = 0\}$$

14. Zakładamy że L jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem. Pokaż że w definicji nilradykału można by rozpatrywać skończenie wymiarowe (niekoniecznie proste) moduły Liego i żądać że $\mathfrak{s}$ działa przez operatory nilpotentne. Ponadto

- jeśli algebra L jest półprosta to $\mathfrak{s} = \{0\}$,
- $\mathfrak{s}$ jest ideałem nilpotentnym,
- jeśli algebra L jest abelowa to $\mathfrak{s} = \{0\}$,
- $\mathfrak{s} \subset [L, L]$,
- jeśli L jest rozwiązalna nad ciałem charakterystyki 0 to $\mathfrak{s} = [L, L]$.