1 Wprowadzenie

Teoria grup Liego zaczęła się od grup lokalnych gdzie operacja grupowa jest zdefiniowana tylko lokalnie. Jednakże pojęcie grupy lokalnej prowadzi do dość trudnych problemów których niektóre rozwiązania są paradoksalne. Dlatego nowoczesne ujęcia pracują z grupami, tzn. operacje grupowe są zdefiniowane globalnie. Grupy lokalne są dość mocno związane z problemem istnienia grupy Banacha-Liego z zadaną algebrą Banacha-Liego, dlatego warto znać podstawowe wyniki o grupach lokalnych.

2 Grupy częściowe

Jeśli P jest zbiorem, $D \subset P \times P$ to grupą częściową nazywamy czwórkę (e, j, m, P) taką że $e \in P$, $j : P \to P$, $m : D \to P$ i spełnione są warunki niżej:

- Niech $x, y, z \in P$ będą takie że $(x, y) \in D$ i $(y, z) \in D$. Jeśli $(m(x, y), z) \in D$ to $(x, m(y, z)) \in D$ i $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$. Podobnie, jeśli $(x, m(y, z)) \in D$ to $(m(x, y), z) \in D$.
- $\{e\} \times P \subset D$, $P \times \{e\} \subset D$ i dla każdego $x \in P$ zachodzą równości $m(e, x) = m(x, e) = x$.
- Dla każdego $x \in P$ mamy $(x, j(x)) \in D$, $(j(x), x) \in D$ i $m(x, j(x)) = m(j(x), x) = e$.
- Jeśli $(x, y) \in D$ to $(j(y), j(x)) \in D$ i $j(m(x, y)) = m(j(y), j(x))$.

e nazywamy jedynką, j odwrotnością zaś m mnożeniem w grupie częściowej. W dalszym ciągu zamiast $j(x)$ będziemy pisać x^{-1} a zamiast $m(x, y)$ będziemy pisać xy. Zamiast pisać o czwórce (e, j, m, P) będziemy pisać o parze (D, P) czy wręcz o P. Jeśli $(x, y) \in D$ to będziemy mówić że iloczyn xy jest zdefiniowany (a w przeciwnym razie że nie jest zdefiniowany).

Tak jak dla grup widać że jedynk e jest jedynym elementem spełniającym dla dowolnego $x \in P$ równość $xe = ex = x$ zaś odwrotność jest jednoznanie wyznaczona przez warunek $xx^{-1} = e$ lub warunek $x^{-1}x = e$.

Oczywiście jeśli P jest grupą a $D = P \times P$ to P jest też grupą częściową. Odwrotnie, grupa częściowa taka że $D = P \times P$ jest grupą. Ogólniej, jeśli P jest podzbiorem pewnej grupy (lub grupy częściowej) takim że $e \in P$ i $P = P^{-1}$ to ograniczając operacje grupowe do P otrzymamy grupę częściową.

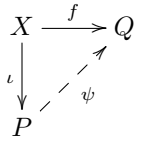
Niech (D_1, P_1) i (D_2, P_2) będą grupami częściowymi. Odwzorowanie $\psi : P_1 \to P_2$ nazywamy homomorfizmem grup częściowych (lub krócej homomorfizmem) jeśli $\psi(D_1) \subset D_2$ i dla każdych x, y takich że $(x, y) \in D_1$ mamy $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$.

Homomorfizm będziemy nazywać zanurzeniem jeśli jest on różnowartościowy.

Przykład: (wolna grupa częściowa). Niech X będzie dowolnym zbiorem zaś F grupą wolną generowaną przez X. Utożsamiając X z jego włożeniem w F przyjmujemy $P = X \cup X^{-1} \cup \{e\}$, $D = \{(x, y) \in P \times P : xy \in P\}$. Zuważmy że dla $x, y \in P$ xy liczone w F jest słowem długości 2 (czyli nie należy do P), chyba że zachodzi jeden z warunków: $x = e$, $y = e$, $x = y^{-1}$. A więc

$$D = P \times \{e\} \cup \{e\} \times P \cup \{(x, x^{-1}) : x \in X \cup X^{-1}\}.$$

Z definicji na D mnożenie z F daje wyniki w P, czyli po ograniczniu mnożenia z F do D i odwrotności z F do P otrzymamy dobrze zdefiniowaną grupę częściową. Grupa ta ma następującą własność: jeśli f jest dowolnym odwzorowaniem z X w grupę częściową Q to istnieje dokładnie jeden homomorfizmem ψ z P w Q taki że $f = \psi \circ \iota$ gdzie ι jest włożeniem tożsamościowym X w P. Można to zilustrować diagramem



By pokazać tą własność zauważmy najpierw że f zadaje jednoznacznie wartości ψ na X. Oczywiście $\psi(e)$ to jedynka w Q. Na X^{-1} musimy mieć $\psi(x^{-1}) = (\psi(x))^{-1}$. Tak określone ψ jest homomorfizmem. Mianowicie, najpierw zauważmy że dla każdego $x \in P$ mamy $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1}$. Dla $x = e$ jest to oczywiste. Dla $x \in X$ wynika to z określenia ψ w x^{-1}. Dla $x \in X^{-1}$, czyli $x = y^{-1}$ gdzie $y \in X$ mamy $x^{-1} = y$ czyli $\psi(x^{-1}) = \psi(y)$ i z określenia ψ mamy $\psi(x) = \psi(y)^{-1}$. Ale w grupie częściowej $(x^{-1})^{-1} = x$, czyli

$$\psi(x)^{-1} = (\psi(y)^{-1})^{-1} = \psi(y) = \psi(x^{-1}).$$

Oznaczmy przez D_Q dziedzinę mnożenia w Q. Jak zauważyliśmy wyżej $(x, y) \in D$ implikuje jeden z trzech przypadków: $x = e$, $y = e$ lub $y = x^{-1}$. Dla $x = e$ mamy $(\psi(x), \psi(y)) = (e, \psi(y)) \in D_Q$ i

$$\psi(x)\psi(y) = e\psi(y) = \psi(y) = \psi(ey) = \psi(xy).$$

Podobnie dla $y = e$. Dla $y = x^{-1}$ jak powkaziśmy wyżej mamy $\psi(y) = \psi(x)^{-1}$ czyli

$$\psi(x)\psi(y) = \psi(x)\psi(x)^{-1} = e = \psi(e) = \psi(xx^{-1}) = \psi(xy)$$

czyli w każdym przypadku mamy $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ co pokazuje że ψ faktycznie jest homomorfizmem.

Dotychczas mamy tylko przykłady grup częściowych otrzymanych przez ograniczenie operacji grupowej do podzbioru. Naturalnie pojawia się pytanie czy każda grupa częściowa jest otrzymana w ten sposób. Dokładniej, pytamy się czy każda grupa częściowa może być zanurzona w grupę. Okazuje się że nie.

Przykład: ???

Malcew podał kryterium pozwalajace rozstrzygać czy grupę częściową da się zanurzyć w grupę. Mianowicie, dla dowolnego ciągu elementów $p_1, p_2, \ldots, p_n$ próbujemy obliczać produkt $p_1 p_2 \ldots p_n$ na różne sposoby. Oczywiście w grupie dzięki łączności i temu że działania są zawsze określone możemy wykonać działania w dowolnej kolejności a wynik nie zależy od kolejności działań. W grupie częściowej mnożenie możemy wykonać tylko jeśli argumenty są w dziedzinie mnożenia. Powiemy że grupa częściowa spełnia ogólne prawo łączności wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu elementów $p_1, p_2, \ldots, p_n$ wynik mnożenia o ile jest zdefinowany nie zależy do kolejności działań.

Lemat 2.1 *Grupę częściową P można zanurzyć w grupę wtedy i tylko wtedy gdy w P jest spełnione ogólne prawo łączności.*

Dowód: Jak zauważyliśmy wyżej, w grupie spełnione jest ogólne prawo łączności, więc jeśli P zanurza się w grupę to w P też jest spełnione ogólne prawo łączności. A więc pozostaje pokazać że jeśli w P spełnione jest ogólne prawo łączności, to P zanurza się w grupę. Grupę G zbudujemy następująco: niech W będzie monoidem wolnym generowanym przez P, tzn. W jest zbiorem wszystkich ciągów skończonych $(p_1, \ldots, p_n)$ z $p_i \in P$ (wliczając w to ciąg pusty). Mnożenie w W to konkatenacja ciągów, tzn.

$$(p_1, \ldots, p_n)(q_1, \ldots, q_m) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m).$$

Dla $a, b \in W$ piszemy $a \to b$ (a może być przepisany w jednym kroku do b) gdy b różni się od a tym że dwa sąsiednie elementy a są zastąpione przez ich produkt w P (tzn. produkt jest zdefiniowany i daje odpowiednią wartość) lub jeśli a jest ciągiem jednoelementowym równym (e), zaś b to ciąg pusty. $\to$ jest relacją. Relację $\leftrightarrow$ definujemy jako symetryczne domknięcie trazytywne $\to$, tzn. $\leftrightarrow$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą $\to$. W miarę łatwo można pokazać że $a \leftrightarrow b$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg $a = a_1, a_2, \ldots, a_k = b$ taki że dla każdego $1 \leq i < k$ albo $a_i \to a_{i+1}$ albo $a_{i+1} \to a_i$.

Grupę G definujemy jako zbiór klas abstrakcji $\leftrightarrow$ z działaniem ilorazowym, tzn $[a][b] = [ab]$. Z definicji $\to$ widać że $a \to c$ implikuje $ab \to cb$. Indukcyjnie wynika stąd że $a \leftrightarrow c$ implikuje $ab \leftrightarrow cb$. Podobnie $b \leftrightarrow c$ implikuje $ab \leftrightarrow ac$. A więc klasa abstrakcji wyniku mnożenia nie zależy od wyboru reprezentantów, czyli mnożenie w G jest dobrze zdefiniowane. Jeśli $(p_1 \ldots p_n) \in W$ to również $(p_n^{-1}, \ldots, p_1^{-1}) \in W$. Przy tym $(p_n^{-1}, \ldots, p_1^{-1}, p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow e$ gdzie e jest jedynką W czyli ciągiem pustym. Mianowicie, definicja $\to$ pozwala nam zastąpić w słowie wyżej parę p_1^{-1}, p_1 przez wynik mnożenia czyli przez e. Jeśli w ciągu wyżej występuje p_2 to parę e, p_2 możemy zastapić przez samo p_2. A więc dostaniemy ciąg $(p_n^{-1}, \ldots, p_2^{-1}, p_2, \ldots, p_n)$. Indukcyjnie, oryginalny ciąg możemy zastąpić przez ciąg jednoelementowy (e), który z kolei możemy zastąpić przez ciąg pusty. Czyli dowolny element G ma lewą odwrotność. Podobnie pokazujemy że elementy G mają prawą odwrotność, czyli G jest grupą.

Odwzorowanie ι z P definujemy jako $\iota(p) = [(p)]$ tzn. jako klasę abstrakcji ciągu jednoelementowego (p). By zakończyć dowód lematu trzeba pokazać że ι jest różnowartościowa. By to zrobić definijemy $\to^*$ jako zwrotne domknięcie tranzytywne $\to$, tzn. $a \to^* b$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg $a = a_1, \ldots, a_k = b$ taki że dla każdego $1 \leq i < k$ zachodzi $a_i \to a_{i+1}$.

Teraz potrzebujemy następujący lemat:

Lemat 2.2 *Jeśli $a \leftrightarrow b$ to istnieje c takie że $c \to^* a$ i $c \to^* b$.*

Przyjmując Lemat 2.2 za znany możemy teraz zauważyć że dla $a, b \in P$ relacja $c \to^* a$ daje wybór kolejności działań przy obliczaniu produktu elementów c. Relacja $c \to^* b$ daje inny wybór kolejności działań. Na mocy ogólnego prawa łączności wynik nie zależy od wyboru kolejności działań, czyli $a = b$, co oznacza że faktycznie ι jest różnowartościowe. □

Musimy teraz pokazać Lemat 2.2. Aby to zrobić pokażemy najpierw lemat pomocniczy

Lemat 2.3 *Jeśli $a \to^* b$ i*

$$a = (q_1, \ldots, q_l),$$

$$b = (p_1, \ldots, p_k)$$

to dla każdego $i \in \{0, \ldots, k\}$ *istnieje* $j \in \{0, \ldots, l\}$ *takie że*

$$(q_1, \ldots, q_j) \to^* (p_1, \ldots, p_i),$$

$$(q_{j+1} \ldots, q_l) \to^* (p_{i+1}, \ldots, p_k)$$

Dowód: Wynik jest oczywisty jeśli $i = 0$ lub $i = k$, bo wtedy jeden z ciągów na które dzielimy b jest pusty i wystarczy pusty ciąg na odpowiednim końcu a. W więc dalej można zakładać że $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. $a \to^* b$ oznacza że istnieją $a = a_1, \ldots, a_n = b$ takie że dla każdego $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ zachodzi $a_m \to a_{m+1}$. Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ wynik jest trywialny. Dla $n = 2$ mamy $a \to b$. A więc istnieje b jest otrzymane z a zastępując pewną parę elementów przez ich produkt. Czyli istnieje o takie że $p_o = q_o q_{o+1}$. Jeśli $o \leq i$ to bierzemy $j = i + 1$, w przeciwnym razie $j = i$. W obu przypadkach widać że j spełnia podany warunek.

Dla $n > 2$ rozpatrujemy najpierw ostatni krok $a_{n-1} \to b$. Mamy

$$a_{n-1} = (r_1, \ldots, r_s)$$

i na mocy już udowodnionego przypadku istnieje t takie że

$$(r_1, \ldots, r_t) \to^* (p_1, \ldots, p_i),$$

$$(r_{t+1}, \ldots, r_s) \to^* (p_{i+1}, \ldots, p_k).$$

$a \to^* a_{n-1}$ z mniejszym n, a więc na mocy założenia indukcyjnego istnieje j takie że

$$(q_1, \ldots, q_j) \to^* (r_1, \ldots, r_t),$$

$$(q_{j+1} \ldots, q_l) \to^* (r_{t+1}, \ldots, r_s)$$

Jako że relacja $\to^*$ przechodnia daje to wynik. □

Teraz pokażemy prostszą wersję Lematu 2.2:

Lemat 2.4 *Jeśli* $a \to^* b$ *i* $c \to b$ *to istnieje* d *takie że* $d \to^* a$ *i* $d \to^* c$.

Dowód: $a \to^* b$ oznacza że istnieje ciąg $a = a_1, \ldots, a_k = b$ taki że dla każdego i takiego że $1 \leq i < k$ zachodzi $a_i \to a_{i+1}$. Dowód jest indukcyjny ze względu na k. Dla $k = 1$ mamy $a = b$ i biorąc $d = c$ dostajemy wynik.

Dla $k > 1$ sprawdzamy różne przypadki. Jeśli b jest ciągiem pustym to $a_{k-1} = (e)$ i $c = (e)$, czyli można wziąść $d = a$ (bo $a \to^* a_{k-1} = c$). W przeciwnym razie $b = (p_1, \ldots, p_n)$ z $n \geq 1$. $a_{k-1} \to b$ oznacza że istnieje l, $1 \leq l \leq n$ oraz u, v takie iloczyn u i v jest zdefiniowany i $p_l = uv$ zaś

$$a_{k-1} = (p1, \ldots, p_{l-1}, u, v, p_{l+1}, \ldots, p_n).$$

Podobnie $c \to b$ oznacza że istnieje m, $1 \leq m \leq n$ oraz w, x takie że $p_m = wx$ zaś

$$c = (p1, \ldots, p_{m-1}, w, x, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

Jeśli $l < m$ to

$$f = (p1, \ldots, p_{l-1}, u, v, p_{l+1}, \ldots, p_{m-1}, w, x, p_{m+1}, \ldots, p_n)$$

spełnia $f \to a_{k-1}$ i $f \to c$. Mamy $a \to^* a_{k-1}$ z mniejszym k czyli na mocy założenia indukcyjnego istnieje d takie że $d \to^* a$ i $d \to^* f$. $d \to^* f$ implikuje że $d \to^* c$ co kończy dowód w tym przypadku.

Przypadek $m < l$ jest podobny. Pozostaje rozpatrzeć $l = m$. Wtedy $uv = wx$. Na mocy Lematu 2.3 zastosowanego do a i a_{k-1} zamiast b i $l+1$ zamiast i mamy

$$a = (q_1, \ldots, q_s, q_{s+1}, \ldots, q_t)$$

i

$$(q_1, \ldots, q_s) \to^* (p1, \ldots, p_{l-1}, u, v), \tag{1}$$

$$(q_{s+1}, \ldots, q_t) \to^* (p_{l+1}, \ldots, p_n). \tag{2}$$

Niech $y = (uv)^{-1}$. Bierzemy

$$d = (q_1, \ldots, q_s, y, w, x, q_{s+1}, \ldots, q_t)$$

Parę w, x możemy zastąpić przez wynik mnożenia, czyli uv otrzymując

$$f = (q_1, \ldots, q_s, y, uv, q_{s+1}, \ldots, q_t).$$

Następnie, w f parę y, uv możemy zastąpić przez wynik mnożenia czyli e otrzymując

$$g = (q_1, \ldots, q_s, e, q_{s+1}, \ldots, q_t)$$

W g parę q_s, e możemy zastąpić przez q_s otrzymując a (zauważmy że q_s wyżej musi się faktycznie pojawić, bo $(q_1, \ldots, q_s) \to^* (p1, \ldots, p_{l-1}, u, v)$ a ciąg po prawej stronie $\to^*$ jest niepusty). Czyli $d \to^* a$. Używając wzory 1 i 2 widzimy że

$$d \to^* (p_1, \ldots, p_{l-1}, u, v, y, w, x, p_{l+1}, \ldots, p_n)$$

zastępując w powyższym parę u, v przez uv, potem parę uv, y przez e i parę e, w przez w pokazujemy że $d \to^* c$. □

Dowód Lematu 2.2: $a \leftrightarrow b$ oznacza że istnieje ciąg $a = a_1, \ldots, a_k = b$ taki że dla każdego $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ jest spełnione $a_i \to a_{i+1}$ lub $a_{i+1} \to a_i$. Dowód prowadzimy przez indukcję ze względu na k. Przpadek $k = 1$ jest trywialny. Dla $k > 1$ z założenia indukcyjnego istnieje d takie że $d \to^* a$ i $d \to^* a_{k-1}$. Jeśli $a_{k-1} \to a_k = b$ to $d \to^* b$ co daje wynik z $c = d$. Jeśli $b = a_k \to a_{k-1}$ to stosujemy Lemat 2.4 otrzymując c takie że $c \to^* d$ i $c \to^* b$. Wtedy jako że $d \to^* a$ i $\to^*$ jest przechodnia mamy $c \to^* a$ co daje wynik. □

Konstrukcja grupy G z dowodu Lematu 2.1 działa niezależnie od tego czy spełnione jest ogólne prawo łączności, tyle że wtedy ι nie musi być różnowartościowe. Grupa G ma następującą własność uniwersalną: jeśli f jest homomorfizmem z P w grupę H to istnieje dokładnie jeden homomorfizm ψ z G w H taki

że $f = \psi \circ \iota$. Mianowicie, na W dostaniemy jednozacznie zdefiniowany homorfizm monoidów ϕ taki że $f = \phi \circ j$ gdzie j jest włożeniem tożsamościowym z P w W. Jako że f jest homomorfizmem, to $a \to b$ implikuje że $\phi(a) = \phi(b)$. Czyli indukcyjnie $a \leftrightarrow b$ implikuje $\phi(a) = \phi(b)$. A więc $\phi(a)$ zależy tylko od klasy abstrakcji a, czyli ψ może być zdefiniowane wzorem $\psi([a]) = \phi(a)$. Jako że ϕ jest jedyne to również ψ jest jedyne.

3 Grupy lokalne

Grupą lokalną nazywamy grupę częściową P z topologią taką że dziedzina D mnożenia jest podzbiorem otwartym w $D \times D$ i operacje grupowe, tzn. mnożenie i odwrotność są ciągłe.

Grupa lokalna może posiadać dodatkową strukturę, np. może być rozmaitością klasy C^k czy analityczną modelowaną na przestrzeni lokalnie wypukłej, zgodną z działaniami grupowymi. Wtedy mówimy że grupa lokalna jest C^k (odpowiednio analityczna).

Lemat 3.1 *Niech L będzie grupą lokalną która jako grupa częściowa zanurza się w pewną grupę. Wtedy istnieje grupa topologiczna G i zanurzenie ι z L w G które jest homeomorfizmem na obraz, przy tym $\iota(L)$ jest podzbiorem otwartym w G. Jeśli L jest C^k (analityczna) to G można wybrać C^k (analityczne). Przy tym wtedy ι i ι^{-1} jest C^k (analityczne).*

Dowód. Z założenia L można zanurzyć w pewną grupę H. Jako zbiór niech G będzie podgrupą H generowaną przez obraz L. Ograniczenie kodziedziny włożenia L w H daje nam włożenie ι z L w G. Topologię w G definiujemy biorąc jako bazę otoczeń punktu $g \in G$ zbiory postaci $\iota(U)g$ gdzie U jest otoczniem e w L. Zauważmy że jeśli U jest otoczeniem e w L, $g \in G$ to istnieje otoczenie e $V \subset (L)$ takie że $g\iota(V)g^{-1} \subset \iota(L)$. Mianowicie automorfizmy wewnętrzne L są zdefiniowane i ciągłe w pewnym otoczeniu jedynki w L. A więc jeśli $g \in \iota(L)$ to istnieje odpowiednie V. Jeśli $g = g_1 g_2 \dots g_k$ z $g_i \in \iota L$ to korzystając z już udowodnionej części indukcyjnie znajdujemy V_i takie że $V_0 = U$, $g_i V_i g_i^{-1} \subset V_{i-1}$. Wtedy $gV_k g^{-1} \subset V_0 = U$.

Teraz rozważamy otoczenie $\iota(U)g_1g_2$ produktu g_1g_2. Jako że mnożenie w L jest ciągłe z otwartą dziedziną to istnieją U_1U_2 takie że mnożenie jest zdefiniowane na U_1U_2 i $U_1U_2 \subset U$. Jak pokazaliśmy wyżej wtedy istnieje otoczenie jedynki V takie że $g_1\iota(V)g_1^{-1} \subset \iota(U_2)$. Teraz $\iota(V) \subset g_1^{-1}\iota(U_2)g_1$ i

$$\iota(U_1)g_1\iota(V)g_2 \subset \iota(U_1)g_1g_1^{-1}\iota(U_2)g_1g_2 = \iota(U_1)\iota(U_2)g_1g_2 \subset \iota(U)g_1g_2$$

czyli mnożenie jest ciągłe w (g_1, g_2). Jako że g_1, g_2 były dowolne oznacza to że mnożenie jest ciągłe na $G \times G$.

Podobnie, rozważajamy otoczenie $\iota(U)g^{-1}$ odwrotności g. Istnieje V takie że $g^{-1}\iota(V)g \subset \iota(U)$ Teraz biorąc $W = V^{-1}$ mamy

$$(\iota(W)g)^{-1} = g^{-1}\iota(W^{-1}) = g^{-1}\iota(V)gg^{-1} \subset \iota(U)g^{-1}$$

czyli odwrotność jest ciągła w g. Jako że g było dowolne to odwrotność ciągła na G.

A więc G z podaną topologią jest grupą topologiczną. Pokażemy teraz że $\iota(L)$ jest zbiorem otwartym i że ι jest homeomorfizmem na obraz. Dla $g \in L$ z

tego że dziedzina mnożenia jest otwarta wynika że istnieje otoczenie jedynki U w L takie że mnożenie jest zdefiniowane na $U \times \{g\}$. Wtedy $\iota(U)\iota(g) \subset \iota(L)$, czyli $\iota(L)$ zawiera otoczenie $\iota(g)$ w G. Jako że $g \in L$ był dowolny oznacza to że $\iota(L)$ jest otwarte w G. Podobny argument pokazuje że jeśli $U \subset L$ jest otwarty to $\iota(L)$ jest otwarte. Niech teraz U będzie otoczeniem jedynki w L zaś $g \in L$. Jako że mnożenie w L ma dziedzinę otwartą w $L \times L$ to istnieje otoczenie jedynki V takie że mnożenie jest zdefiniowane na $V \times \{g\}$. Niech $W = V \cap U$. Teraz

$$\iota(Wg) = \iota(W)\iota(g) \subset \iota(U)\iota(g)$$

a więc ι jest ciągła w g. Jako że g było dowolne oznacza to że ι jest ciągła na L. Jako że ι jest ciągła, z założenia różnowartościowa i przekształca zbiory otwarte na otwarte to jest homeomorfizmem na obraz. To daje wynik w przypadku gdy L jest tylko grupą lokalną.

Jeśli L jest C^k (analityczna) to ustalamy otocznie jedynki V w L będące dziedziną mapy ϕ i wybieramy U takie że $U = \iota(W)$, a W jest wybrane tak by mnożenie (w_1, w_2, w_3) było zdefiniowane w L dla $w_i \in W$ zarówno jako $(w_1w_2)w_3$ jak i jako $w_1(w_2w_3)$ i $W^3 \subset V$. Oczywiście wtedy $U^3 \subset \iota V$. Jako dziedziny map G przyjmujemy zbiory postaci Ug. Odpowiednią mapę definiujemy wzorem $\psi_g(x) = \phi(\iota^{-1}(xg^{-1}))$. Ten układ map jest zgodny. Mianowice, jeśli $Ug_1 \cap Ug_2 \neq \emptyset$ to $Ug_1g_2^{-1} \cap U \neq \emptyset$ co implikuje $g_1g_2^{-1} \in U^2$ i $Ug_1g_2^{-1} \subset U^3$. Mamy $\psi_g^{-1}(y) = \iota(\phi^{-1}(y))g$. A więc

$$\psi_{g_2} \circ \psi_{g_1}^{-1}(y) = \phi(\iota^{-1}(\iota(\phi^{-1}(y))g_1g_2^{-1}))$$

Z określenia dziedziny ϕ_{g_2} wynika że $\phi^{-1}(y) \in W$. Jako że $g_1g_2^{-1} \in U^2$ to $\iota^{-1}(g_1g_2^{-1}) \in W^2$, czyli mnożenie $\phi^{-1}(y)$ z $\iota^{-1}(g_1g_2^{-1})$ jest zdefiniowane w L, czyli skoro ι jest homomorfizmem to

$$\psi_{g_2} \circ \psi_{g_1}^{-1}(y) = \phi(\iota^{-1}(\iota(\phi^{-1}(y)\iota^{-1}(g_1g_2^{-1})))) = \phi(\phi^{-1}(y)\iota^{-1}(g_1g_2^{-1})).$$

Jako że mnożenie $\phi^{-1}(y)$ i $\iota^{-1}(g_1g_2^{-1})$ jest zdefiniowane i C^k (analityczne) to $\psi_{g_2} \circ \psi_{g_1}^{-1}$ jest C^k (analityczne), czyli faktycznie układ map ψ_g jest zgodny, a więc zadaje na G strukturę rozmaitości C^k (analitycznej).

Podobnie jak poprzednio pokazujemy że skoro $x \mapsto gxg^{-1}$ jest C^k (analityczne) i jest ciągłe w parze (e, g) w L to dla ustalonego $g \in G$ i otoczenia zera X w G istnieje otoczenie zera Y takie że $x \mapsto gxg^{-1}$ jest odwzorowaniue C^k (analitycznym) z Y w X. To pozwala powtórzyć argument używany do pokazania ciągłości i pokazać że mnożanie i branie elementu odwrotnego są C^k (analityczne).

Pozostaje pokazać że ι i ι_{-1} są C^k (analityczne). Ustalny $g \in L$. Wybieramy otwarte otoczenie jedynki X takie że mnożenie w L jest zdefiniowane na $X \times \{g\}$ i $(Xg) \times \{g^{-1}\}$ oraz $X \subset U$. Liczymy $\psi_{\iota(g)} \circ iota$ na Xg:

$$(\psi_{\iota(g)} \circ \iota)(xg) = \phi(\iota^{-1}(\iota(xg)\iota(g)^{-1})) = \phi(\iota^{-1}(\iota(xgg^{-1}))) = \phi(x)$$

gdzie druga równość zachodzi bo potrzebne iloczyny są zdefiniowane w L i ι jest homomorfizmem. ϕ jest mapą, czyli jest C^k (analityczne), a więc $\psi_{\iota(g)} \circ \iota$ na Xg. Jako że g było dowolne oznacza to że ι jest C^k (analityczne). Z równości $(\psi_{\iota(g)} \circ \iota)(xg) = \phi(x)$ wynika też że $\iota^{-1} \circ \psi_{\iota(g)}^{-1} = \phi^{-1}$ na X. Znowu, jako że g jest dowolne oznacza to że ι^{-1} jest C^k (analityczne). $\square$

Lemat 3.2 *Jeśli P jest gęstą podgrupą grupy lokalnej Q i P można zanurzyć w grupę, to Q można zanurzyć w grupę.*

Dowód: Na mocy Lematu 2.1 w P zachodzi ogólne prawo łączności. Twierdzimy że w Q zachodzi ogólne prawo łączności. Mianowicie, rozważmy jedną z równości wymaganych przez ogólne prawo łączności. Jest to równość funkcji ciągłych zdefiniowanych na otwartym podzbiorze W k-tej potęgi kartezjańskiej Q dla odpowiednich k. Przekrój G k-tej potęga kartezjańskiej P z W jest gęsty w W. Na G zachodzi potrzebna równość bo w P zachodzi ogólne prawo łączności. Jako że jest to równość funkcji ciągłych to zachodzi na całym W. Równość którą rozważaliśmy była dowolna, więc faktycznie w Q zachodzi ogólne prawo łączności. □

4 Algebry i grupy Banacha-Liego

Powiemy że algebra Liego A jest algebrą Banacha-Liego jeśli na A jest zadana norma taka że w tej normie A jest przetrzenią Banacha, zaś nawias Liego jest ciągły, tzn. istnieje C takie że $\|[x,y]\| \leq C\|x\|\|y\|$. Powiemy że grupa G jest C^k z $k \geq 1$ grupą Banacha-Liego jeśli ma strukturę rozmaitości C^k modelowanej na przestrzeni Banacha i operacje grupowe, tzn. mnożenie i odwrotność są C^k. Podobnie powiemy że G jest analityczną grupą Banacha-Liego jeśli ma strukturę rozmaitości analitycznej modelowanej na przestrzeni Banacha i operacje grupowe są analityczne.

Oczywista modyfikacja definicji wyżej daje definicję lokalnej grupy Banacha-Liego (C^k lub analitycznej).

Jeśli G jest lokalną grupą Banacha-Liego to na G można zdefiniować prawostronnie niezmiennicze pola wektorowe. Można pokazać że komutator prawostronnie niezmienniczych pól wektorowych jest prawostronnie niezmienniczym polem wektorowym. Można też pokazać że prawostronnie niezmienniczym pole wektorowe jest jednoznacznie wyznaczone przez wartość w jedynce grupy. A więc przestrzeń prawostronnie niezmienniczym pól wektorowych ma strukturę przestrzeni Banacha z normą zadaną wzorem $\|X\| = \|X(e)\|$. Widać że w tej normie nawias Liego jest ciągły. Jeśli $k \geq 2$ to łatwo sprawdzić że nawias Liego spełnia tożsamość Jacobiego. A więc lokalna grupa Banacha-Liego klasy C^k z $k \geq 2$ ma dobrze zdefiniowaną algebrę Liego (która jest algebrą Banacha-Liego).

Mając daną algebrą Banacha-Liego A wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa pozwala zdefiniować mnożenie w otoczeniu 0 w A. W ten sposób otrzymujemy lokalną analityczną grupę Banacha-Liego z algebrą Liego A. Naturalne jest pytanie czy istnieje (globalna) grupa Banacha-Liego z algebrą Liego A. Ogólnie to nie, ale można pokazać wyniki szczególne w tym kierunku.

Specjalizując Lemat 3.1 do przypadku Banacha-Liego otrzymujemy następujący lemat:

Lemat 4.1 *Niech L będzie lokalną grupą Banacha-Liego. L można zanurzyć dyfeomorficznie w grupę Banacha-Liego wtedy i tylko wtedy gdy L jako grupa częściowa zanurza się w grupę.*

Lemat 4.2 *Jeśli isnieje ciągłe różnowartościowe odwzorowanie ι algebry Banacha-Liego A w algebrę Liego algebry Banacha B (gdzie nawias Liego to komutator),*

to A jest algebrą Liego grupy Banacha-Liego. W szczególności, jeśli A ma trywialne centrum to A jest algebrę Liego grupy Banacha-Liego.

Dowód: Najpierw rozpatrzmy przypadek gdy A ma trywialne centrum. Wtedy odwzorowanie $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ jest różnowartościowym odwzorowaniem z A w algebrę Banacha $L(A)$ operatorów liniowych ograniczonych na A, które przeprowadza nawias Liego w A na komutator w $L(A)$. A więc ta część wynika z pierwszej części.

Jeśli B jest algebrą Banacha to grupa G elementów odwracalnych w B jest analityczną grupą Banacha-Liego. Mianowicie, G jest podzbiorem otwartym w B, więc jest rozmaitością analityczną. Oczywiście mnożenie i odwrotność są analityczne, więc faktycznie G jest analityczną grupą Banacha-Liego. Jeśli f jest funkcją gładką zdefiniowaną w pewnym otoczeniu $e = 1$, zaś $X \in B$ to

$$Xf(g) = (\partial_t f((1 + tX)g))|_{t=0} = (\partial_{\phi_X(g)} f)(g)$$

gdzie $\phi_X(g) = Xg$, zaś ∂_v dla $v \in B$ oznacza pochodną kierunkową w kierunku wektora v. Teraz

$$XYf = \partial_{\phi_X} \partial_{\phi_Y} f = f''(\phi_X, \phi_Y) + \partial_{\partial_{\phi_X} \phi_Y} f,$$

$$YXf = f''(\phi_Y, \phi_X) + \partial_{\partial_{\phi_Y} \phi_X} f.$$

Jako że druga pochodna jest symetryczna to odejmując dostaniemy

$$(XY - YX)f = \partial_{\partial_{\phi_X} \phi_Y} f - \partial_{\partial_{\phi_Y} \phi_X} f$$

czyli

$$[X, Y] = (XY - YX)(e) = (\partial_{\phi_X} \phi_Y - \partial_{\phi_Y} \phi_X)(e).$$

Uwzględniając wzór $\phi_X(g) = Xg$ mamy

$$\partial_{\phi_X} \phi_Y = \partial_{Xg} Yg = YXg$$

czyli

$$[X, Y] = YX - XY.$$

Innymi słowy nawias Liego algebry Liego B to minus komutator elementów B. Teraz bierzemy jako $\tilde{G}$ grupę G z odwróconym mnożeniem, tzn. $a \cdot b$ w $\tilde{G}$ to ba w G. Łatwo sprawdzić że nawias Liego w $\tilde{G}$ to minus nawias Liego w G, czyli $\tilde{G}$ jest algebrą Banacha-Liego z algebrą Liego B.

Odwzorowanie $x \mapsto \exp(x)$ gdzie exp jest zadane szeregiem potęgowym jest analitycznym odwzorowanie z B w $\tilde{G}$. Jego pochodna w 0 to identyczność B. A więc na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej exp jest różnowartościowe w pewnym otoczeniu 0 w B.