

Grupy i algebry Liego

W. Hebisch

3 lutego 2026

1 Moduły nad algebrami półprostymi

1.1 Operator Casimira

Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0. Wtedy forma Killinga A jest niezdegenerowana. Niech e_i będzie bazą A zaś f_i bazą dualną względem formy Killinga.

Lemat 1.1 *Przy założeniach jak wyżej $c = \sum e_i f_i$ leży w centrum algebry obwiedniej $U(A)$.*

Dowód: $[z, c] = \sum ([z, e_i] f_i + e_i [z, f_i])$. Wystarczy pokazać że dla dowolnego $z \in A$ mamy $[z, c] = 0$. Ustalmy z . Niech $\tilde{c} \in A \otimes A$ będzie zadane wzorem:

$$\tilde{c} = \sum ([z, e_i] \otimes f_i + e_i \otimes [z, f_i]).$$

Chcemy pokazać że $\tilde{c} = 0$. Zauważmy że forma K_2 zdefiniowana na tensorach prostych wzorem

$$K_2(x \otimes y, t \otimes u) = K(x, t)K(y, u)$$

jest niezdegenerowana na $A \otimes A$. A więc wystarczy wyliczyć

$$K_2(\tilde{c}, f_l \otimes e_k) = \sum_i (K([z, e_i], f_l)K(f_i, e_k) + K(e_i, f_l)K([z, f_i], e_k)).$$

Dla $i \neq k$ pierwszy składnik jest zerem, dla $i \neq l$ drugi składnik jest zerem. Czyli mamy

$$K_2(\tilde{c}, f_l \otimes e_k) = K([z, e_k], f_l) + K([z, f_l], e_k) = K([z, e_k], f_l) + K(e_k, [z, f_l]) = 0$$

gdzie ostatnia równość zachodzi bo K jest niezmiennicza. A więc pokazaliśmy że $K_2(\tilde{c}, w) = 0$ dla $w \in A \otimes A$, czyli skoro K_2 jest niezdegenerowana to $\tilde{c} = 0$. Ale $[z, c]$ jest obrazem $\tilde{c}$ przez naturalny homomorfizm z $T(A)$ w $U(A)$, czyli $[z, c] = 0$. Jako że z było dowolne oznacza to że c komutuje z obrazem A w $U(A)$. Ale obraz A generuje $U(A)$, więc c komutuje z $U(A)$, czyli jest w centrum $U(A)$. $\square$

1.2 Półprostota modułów

Lemat 1.2 *Niech A będzie półprostą algebrą Liego nad ciałem R charakterystyki 0, V nietrywialnym modulem Liego skończenie wymiarowym jako przestrzeń wektorowa nad R . Oznaczmy przez $\pi(x)$ działanie $x \in A$ na V . Wtedy forma śladowa*

$$K_V(x, y) = \text{Tr}(\pi(x)\pi(y))$$

jest niezerowa. Jeśli A jest algebrą prostą to K_V jest wielokrotnością formy Killinga.

Dowód: Bez utraty ogólności można zakładać że ciało jest algebraicznie domknięte. Jeśli $A = \mathfrak{sl}(2, R)$ i V jest modulem prostym nad A to wynik wynika z opisu modułów prostych nad A skończenie wymiarowych jako przestrzeń nad R . Przy tym K_V jest dodatnią wymierną wielokrotnością formy Killinga. Jeśli V jest tylko modulem skończenie wymiarowym to rozważamy jego ciąg Jordana-Höldera. Wtedy $K_V = \sum K_{V_i}$ gdzie V_i są A -modułami prostymi. Skoro dla każdego i K_{V_i} jest dodatnią wymierną wielokrotnością formy Killinga, to również K_V jest dodatnią wymierną wielokrotnością formy Killinga. Ogólne półproste A jest generowane przez sumę podalgebr izomorficznych z $\mathfrak{sl}(2, R)$. Gdyby każda z tych podalgebr działała trywialnie na V , to działanie A byłoby trywialne. A więc co najmniej jedno z $\mathfrak{sl}(2, R)$ działa nietrywialnie i daje niezerową wartość formy K_V . Jeśli A jest prosta to dowolna forma symetryczna niezmiennicza jest wielokrotnością formy Killinga. $\square$

Lemat 1.3 *Jeśli A jest skończenie wymiarową prostą algebrą Liego nad ciałem R charakterystyki 0, V jest modulem prostym nad A i skończenie wymiarową przestrzenią nad R to ciąg dokładny*

$$0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow R \rightarrow 0$$

się rozszczepia, czyli V ma moduł dopełniczy.

Dowód: A działa trywialnie na R (bo w przeciwnym razie A działanie byłoby wierne, ale obraz jest przemienny). A więc elementy A odwzorowują W w V . Oznacza to że również obraz operatora Casimira $\pi(c)$ odwzorowuje W w V . Na V $\pi(c)$ komutuje z działaniem A , czyli skoro V jest prosty, to $\pi(c)$ jest wielokrotnością identyczności. Forma śladowa K_V jest niezerową wielokrotnością formy Killinga, czyli

$$\text{Tr}(\pi(c)) = \sum \text{Tr}(\pi(e_i)\pi(f_i)) = \sum K_V(e_i, f_i) = \lambda \sum K(e_i, f_i) = \lambda \dim(A)$$

czyli $\pi(c)$ ma niezerowy ślad, więc jest niezerowy i jego jądro daje szukaną podprzestrzeń. $\square$

Lemat 1.4 *Jeśli A jest półprosta i skończenie wymiarowa nad ciałem R charakterystyki 0, V jest modulem Liego nad A skończonego wymiaru jako przestrzeń wektorowa nad R , to V jest sumą prostą prostych modułów Liego.*

Dowód: Poprzedni lemat przez indukcję daje dowód lematu o przedstawieniu modułu jako sumy prostej. Najpierw zauważmy że poprzedni lemat dalej działa nawet jak V nie jest modulem prostym, mianowicie wydzielimy V przez podmoduł U taki że iloraz jest prosty, stosujemy lemat i dostajemy ciąg w modułami U i S :

$$0 \rightarrow U \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow 0.$$

Moduł U ma mniejszą długość, więc po skończonej ilości kroków zredukujemy go do modułu zerowego, wtedy S będzie modulem dopełniczym.

Dalej algebra półprosta jest sumą prostą algebr prostych. Stosujemy lemat do jednego składnika, wydzielając przez podmoduły V gdzie ten składnik działa trywialnie. Pozwala to zmniejszyć moduły i wyeliminować jeden składnik z sumy prostej co daje indukcyjny dowód dla sumy prostej. W ogólnym przypadku rozpatrujemy moduł Liego W nad A i jego podmoduł V . Niech U będzie podprzestrzenią przestrzeni homomorfizmów (odwzorowań liniowych nad R) z W w V które sprowadzają się do mnożenia przez skalar na V . Niech S będzie podprzestrzenią U składającą się z odwzorowań zerowych na V . A działa przez komutator na U odwzorowując je w V . Na mocy lematu istnieje element $p \in U$ który komutuje z A i jest identycznością na V . Jądro p daje teraz podmoduł dopełniczy do V . $\square$

1.3 Twierdzenie Levy'ego-Malcewa

Lemat 1.5 *Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0. Jeśli A ma ideał abelowy I , A/I jest półprosta i A ma trywialne centrum to istnieje podalgebra $S \subset A$ taka że A/I jest izomorficzne z S .*

Dowód: Znowu rozpatrujemy przestrzeń W odwzorowań liniowych z A w I które są wielokrotnością identyczności na I . A działa na W wzorem

$$\pi(a)(w) = \text{ad}_a w - w \text{ad}_a$$

Mamy podprzestrzeń V składającą się z odwzorowań które są zerem na I . Zauważmy że $\pi(a)W \subset V$.

Jeśli $a \in I$ to $\text{ad}_a w = 0$, czyli $\pi(a)w = -\lambda(w)\text{ad}_a$, gdzie $\lambda(w)$ to skalar taki że $wv = \lambda(w)v$ dla $v \in I$. A ma trywialne centrum, więc ad jest iniektywne. A więc ad odwzorowuje I różnowartościowo na podprzestrzeń $U \subset V$. Z postaci π wynika że U jest niezmiennicza na działaniu π . A więc A działa na W/U . Wyżej pokazaliśmy że dla $a \in I$ mamy $\pi(a)(W) \subset U$, czyli I działa zerowo na W/U . A więc dostaniemy działanie A/I na W/U . Jako że A/I jest półprosta, to podprzestrzeń V/U ma podprzestrzeń dopełniczą, czyli istnieje $w \in W$ takie że $\pi(a)w \in U$ i $\lambda(w) = -1$. Niech $S = \{a \in A : \pi(a)w = 0\}$. Oczywiście S jest podalgebrą A . Zauważmy że wzór $\pi(a)w = \text{ad}_a$ dla $a \in I$ implikuje że $A = S \oplus I$ jako przestrzeń wektorowa. Oczywiście S jest izomorficzne z A/I . $\square$

Lemat 1.6 *(Levy, Malcev) Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 zaś R będzie maksymalnym ideałem rozwiązalnym*

w A . Wtedy A/R jest algebrą półprostą. Ponadto istnieje podalgebra $S \subset A$ dopełnicza do R . Tzn. A/R jest izomorficzne z S i A jest produktem półprostym S i R .

Dowód. Najpierw zauważmy że A/R jest algebrą półprostą. Mianowicie w przeciwnym przypadku A/R zawierałoby rozwiązalny ideał I . Niech J będzie przeciwobrazem I przez odwzorowanie ilorazowe z A w A/R . J jest ideałem w A i jest rozwiązalny bo jego iloraz przez rozwiązalny ideał R jest izomorficzny z rozwiązalnym I . To przeczyłoby maksymalności R , czyli A/R jest półprosta.

Wiemy że istnienie algebry dopełniczej S implikuje że A jest produktem półprostym. Pozostaje pokazać istnienie S . W tym celu rozpatrujemy A jako moduł Liego nad A . Dowód jest indukcyjny ze względu na wymiar R . Najpierw rozpatrujemy przypadek gdy R jest modulem prostym nad A . Wtedy R jest ideałem abelowym w A (bo w przeciwnym razie $[R, R]$ dałby nam nietrywialny podmoduł Liego). Jeśli R jest modulem trywialnym, to R jest równe centrum A . Wtedy działanie dołączone A na A daje nam działanie A/R na A . Przy tym działaniu R jest podmodulem niezmienniczym. Jako że A/R jest półprosta to istnieje podmoduł dopełniczy S . Oczywiście jest to też podmoduł dla działania A , czyli podalgebra. Mamy przy tym $S = [A, A]$.

Jeśli R jest nietrywialnym modulem prostym to centrum A jest trywialne. Mianowicie, centrum A jako ideał rozwiązalny jest podmodulem Liego w R . Jako że R jest prosty, to albo R jest równe centrum A i wtedy R byłby trywialny, albo centrum jest trywialne. Jako że centrum A jest trywialne i R jest abelowy to dostajemy wynik z Lematu 1.5.

Gdy R nie jest modulem prostym to indukcyjnie zakładamy że wynik zachodzi dla algebr z R mniejszego wymiaru. Niech I będzie maksymalnym podmodulem Liego w R różnym od R . Wtedy R/I jest modulem prostym (bo nietrywialny podmoduł R/I jako przeciwobraz przez odwzorowanie ilorazowe dałby podmoduł R większy od I). Niech A_1 będzie ilorazem A/I . Wtedy R/I jest maksymalnym ideałem rozwiązalnym w A_1 . Jako że R/I jest prostym modulem Liego nad A jest też modulem prostym nad A_1 . A więc do A_1 stosuje się poprzednio udowodniona część i istnieje podalgebra S_1 dopełnicza do R/I w A_1 . Niech A_2 będzie przeciwobrazem S_1 w A . $A_2 \cup R = I$ jest maksymalnym ideałem rozwiązalnym w A_2 . Jako że wymiar I jest mniejszy niż wymiar R , to z założenia indukcyjnego A_2 zawiera podalgebrą S dopełniczą do I . Ale S jest też algebrą dopełniczą do R w A . $\square$