

Definicja. Jeśli M jest modulem Liego nad algebrą Liego A nad pierścieniem R to definiujemy $\text{End}_A(M)$ jako zbiór endomorfizmów M które komutują z działaniem A . $\text{End}_A(M)$ ma naturalną strukturę algebry łącznej nad R .

Lemat 0.1 *Niech A będzie algebrą Liego taką że albo $A = [A, A]$ albo centrum A jest trywialne. Traktujemy A jako A -moduł (A działa przez ad). Wtedy $\text{End}_A(A)$ jest przemienny.*

D. Niech $a, b \in \text{End}_A(A)$. Zauważmy że

$$a[x, y] = a\text{ad}_x(y) = \text{ad}_x(ay) = [x, ay].$$

Ponadto

$$a[x, y] = -a[y, x] = -[y, ax] = [ax, y].$$

A więc

$$ab[x, y] = a[x, by] = [ax, by] = b[ax, y] = ba[x, y].$$

Jeśli $A = [A, A]$ to równość wyżej oznacza że $ab = ba$. W przeciwnym razie A ma trywialne centrum i piszemy

$$[abx, y] = ab[x, y] = ba[x, y] = [bax, y].$$

A więc $(ab - ba)x$ jest w centrum A , czyli $(ab - ba)x = 0$, czyli również w tym przypadku $ab = ba$. $\square$

Lemat 0.2 *Jeśli A jest skończone wymiarową algebrą Liego nad ciałem K charakterystyki 0, to istnieje skończone rozszerzenie algebraiczne L/K takie że rozkład na przestrzenie pierwiastkowe nad L jest identyczny z rozkładem nad domknięciem algebraicznym K .*

D. Rozszerzamy K tak by elementy bazy podalgebry Cartana miały komplet wartości własnych. Wtedy działanie przez ad całej podalgebry Cartana daje się przedstawić w postaci trójkątnej górnej co daje identyczny rozkład jak nad domknięciem algebraicznym K . $\square$

Lemat 0.3 *Jeśli A jest prostą skończone wymiarową algebrą Liego nad ciałem K , to istnieje skończone rozszerzenie algebraiczne F/K takie że A można potraktować jako algebrę Liego nad F . Ponadto oznaczając przez B A potraktowane jako algebra Liego nad F mamy $\text{End}_B(B) = F$ i B jest prosta.*

D. Niech $F = \text{End}_A(A)$. Na mocy lematu 0.1 F jest pierścieniem przemiennym. Na mocy lematu Schura F jest pierścieniem z dzieleniem. Oczywiście F zawiera K i ma skończony wymiar nad K , a więc F jest skończonym rozszerzeniem K . Niech B to będzie A traktowane jako algebra Liego nad F . Jako że F jest przemienne to endomorfizm A nad K jest F liniowy, czyli jest też endomorfizmem nad F , czyli endomorfizmem B co daje równość $\text{End}_B(B) = \text{End}_A(A) = F$. Podmoduł $M \subset B$ można potraktować jako podmoduł nad A , a więc skoro A jest prosta to albo $M = \{0\}$, albo $M = A$, czyli

B faktycznie jest prosta. □

Definicja: Algebrę łączną nazywamy prostą jeśli nie zawiera nietrywialnych ideałów dwustronnych.

Komentarz: Łączna algebra prosta może zawierać nietrywialne ideały lewostronne, więc nie musi być modulem prostym nad sobą.

Lemat 0.4 *Jeśli F/K jest rozszerzeniem ciał, A jest algebrą łączną (lub Liego) nad K , M jest modulem nad K takim że $\text{End}_A(M) = K$ to $\text{End}_{A_F}(M_F) = F$.*

D. Dowód w obu przypadkach tzn. łącznym i Liego jest prawie taki sam. Dalej będziemy używać notację łączną bo jest nieco prostsza (w przypadku Liego trzeba by w różnych miejscach zamiast y pisać ad_y).

Niech f_α będzie bazą F nad K . Wtedy

$$M_F = M \otimes_K F = \bigoplus_\alpha M \otimes_K K f_\alpha$$

jako przestrzeń wektorowa nad K , czyli dowolny element M_F można jednoznacznie zapisać w postaci $\sum_\alpha x_\alpha \otimes f_\alpha$. Niech $Z \in \text{End}_{A_F}(M_F)$. Możemy napisać

$$Z\left(\sum_\alpha x_\alpha \otimes f_\alpha\right) = \sum_\alpha Z(x_\alpha \otimes f_\alpha) = \sum_\alpha \sum_\beta z_{\beta,\alpha}(x_\alpha) \otimes f_\beta$$

gdzie $z_{\beta,\alpha}$ to współczynniki w zapisie $Z(x_\alpha \otimes f_\alpha)$. Niech $y \in A$. Mamy

$$Z\left(y \sum_\alpha x_\alpha \otimes f_\alpha\right) = \sum_\alpha \sum_\beta z_{\beta,\alpha}(y x_\alpha) \otimes f_\beta.$$

Jako że $Z \in \text{End}_{A_F}(M_F)$ to

$$Z\left(y \sum_\alpha x_\alpha \otimes f_\alpha\right) = y Z\left(\sum_\alpha x_\alpha \otimes f_\alpha\right) = \sum_\alpha \sum_\beta y z_{\beta,\alpha}(x_\alpha) \otimes f_\beta$$

czyli skoro zapis wyżej jest jednoznaczny to

$$z_{\beta,\alpha}(y x_\alpha) = y z_{\beta,\alpha}(x_\alpha).$$

Jako że x_α są dowolne to $z_{\beta,\alpha} \in \text{End}_A(M)$. Ale $\text{End}_A(A) = K$, czyli istnieją $c_{\beta,\alpha} \in K$ takie że

$$Z\left(\sum_\alpha x_\alpha \otimes f_\alpha\right) = \sum_\alpha \sum_\beta c_{\beta,\alpha} x_\alpha \otimes f_\beta.$$

Niech teraz W będzie K -liniowym odwzorowaniem na F zadany wzorem

$$W\left(\sum_\alpha k_\alpha f_\alpha\right) = \sum_\alpha \sum_\beta c_{\beta,\alpha} k_\alpha f_\beta$$

Widać że $Z = \text{id}_M \otimes W$. Jako że Z jest F -liniowe to również W musi być F -liniowe, czyli biorąc $a = W(1)$ dla każdego $f \in F$ mamy $W(f) = af$. Ale to oznacza że dla każdego $x \in M_F$ mamy $Z(x) = ax$. Jako że $Z \in \text{End}_{A_F}(M_F)$ był dowolny oznacza to że $\text{End}_{A_F}(M_F) = F$. □

Definicja: Algebrę łączną (lub Liego) A nad ciałem K nazywamy centralną prostą jeśli $A \otimes \tilde{K}$ jest algebrą prostą.

Lemat 0.5 *Niech A będzie algebrą łączną lub Liego nad ciałem K . Niech M będzie modulem nad A takim że $\text{End}_A(M) = K$ i niech V będzie przestrzenią wektorową nad K . Wtedy dowolny podmoduł $N \subset M \otimes_K V$ jest postaci $M \otimes_K W$ gdzie $W \subset V$ jest podprzestrzenią.*

D. Oczywiście $\text{End}_A(M) = K$ implikuje że M jest modulem prostym. $S = M \otimes_K V$ jest izomorficzny z sumą prostą $\dim(V)$ kopii M (gdzie $\dim(V)$ może być nieskończone).

Dla skończonego $\dim(V)$ stosujemy indukcję. Dla $\dim(V) = 1$ wynik jest oczywisty. Dla większego wymiaru zapisujemy $V = K \oplus V_1$ gdzie V_1 ma wymiar o 1 mniejszy. Wtedy S jest izomorficzny z $M \oplus M \otimes V_1$. Rozpatrujemy rzut z N na pierwszy składnik. Obraz to albo $\{0\}$ albo całe M . W pierwszym przypadku $N \subset M \otimes V_1$ i stosujemy założenie indukcyjne. W drugim rozpatrujemy $N \cap M \otimes V_1$. Jest to podmoduł $M \otimes V_1$ a więc z założenia indukcyjnego jest postaci $M \otimes W_1$. Jeśli W_1 jest nietrywialne to zastępujemy V przez V/W_1 a N przez $N_1 = N/(M \otimes W_1)$. V/W_1 ma mniejszy wymiar niż V , więc stosuje się założenie indukcyjne i $N_1 = M \otimes W_2$ gdzie W_2 jest podprzestrzenią V/W_1 . Wtedy $N = M \otimes W$ gdzie W jest przeciwobrazem W_2 przez odwzorowanie ilorazowe. A więc pozostaje rozpatrzyć przypadek gdy $N \cap M \otimes V_1$ jest trywialne. Wtedy dla $m \in M$ istnieje dokładnie jeden $v \in M \otimes V_1$ taki że $(m, v) \in N$. Mianowicie, gdyby były dwa v , tzn. $v_1, v_2 \in M \otimes V_1$ takie że $(m, v_i) \in N$ to $(0, v_1 - v_2) = (m, v_1) - (m, v_2)$ byłby niezerowym elementem $N \cap M \otimes V_1$, a to już rozważyliśmy. A więc N jest wykresem odwzorowania ϕ z M w $M \otimes V_1$. Jako że V_1 jest sumą prostą przestrzeni jednowymiarowych to ϕ jest sumą prostą odwzorowań ϕ_i z M w kopie M . Jako że $\text{End}_A(M) = K$ to każde ϕ_i to mnożenie przez element $a_i \in K$. Czyli elementy N są postaci $(v, a_1 v, \dots, a_n v)$ gdzie n to wymiar V_1 . Wynika stąd że $N = M \times W$ gdzie W jest przestrzenią rozpinaną przez $(1, a_1, \dots, a_n)$. To kończy krok indukcyjny i dowód dla skończenia wymiarowego V .

W ogólnym przypadku niech W będzie maksymalną podprzestrzenią V taką że $N_1 = M \otimes W \subset N$. Gdyby $N_1 \neq N$ to jak poprzednio rozpatrujemy $N_2 = N/N_1$ i $V_2 = V/W$. N/N_1 byłby niezerowym podmodulem, więc zawierałby pewien element n . Dowoly element produktu tensorowego $M \otimes V_2$ jest zawarty w produkcie tensorowym skończenia wymiarowej podprzestveni z M . A więc istnieje skończenie wymiarowa podprzestrzeń $V_3 \subset V_2$ taka że $n \in M \times V_3$, czyli $N_2 \cap M \times V_3 \neq \{0\}$. Z wyniku w wymiarze skończonym istnieje nietrywialna podprzestrzeń $V_4 \subset V_3$ taka że $M \otimes V_4 \subset N_2$. Przeciwobraz V_4 dałby przestrzeń $V_5 \subset V$ taką że $M \otimes V_5 \subset N$ i V_5 jest większa od W . To daje sprzeczność z maksymalnością W i pokazuje że $N = M \otimes W$ $\square$

Lemat 0.6 *Niech A będzie skończenie wymiarową prostą algebrą Liego nad ciałem K taką że $\text{End}_A(A) = K$. Wtedy A jest centralna prosta.*

D. Oczywiście $A_{\bar{K}} = A \otimes \bar{K}$ jest skończenie wymiarowa nad $\bar{K}$. Na mocy lematu 0.4 $\text{End}_{A_{\bar{K}}}(A_{\bar{K}}) = \bar{K}$. By pokazać że $A_{\bar{K}}$ jest prosta rozpatrujemy $A_{\bar{K}}$ jako A -moduł. Na mocy lematu 0.5 dowolny A -podmoduł $A_{\bar{K}}$ jest postaci $A \otimes V$ gdzie V jest podprzestrzenią $\bar{K}$. Jeśli V jest trywialna to podmoduł jest trywialny. Jeśli V jest nietrywialna a podmoduł jest również podprzestrzenią nad $\bar{K}$ to $V = \bar{K}$ czyli podmoduł jest równy $A_{\bar{K}}$, czyli $A_{\bar{K}}$ jest modulem prostym

nad sobą czyli A_K jest algebrą prostą. $\square$

Lemat 0.7 *Jeśli F/K jest rozszerzeniem ciał, A jest algebrą prostą nad F , B to A potraktowane jako algebra Liego nad K , to B jest prosta.*

D. Niech I będzie nietrywialnym ideałem w B i niech $G = \{[x, y], x \in B, y \in I\}$. Jako że mnożenie przez elementy F komutuje z ad , to G jest zamknięte na mnożenie przez elementy F . A więc $J = \text{lin}_K G$ jest przestrzenią wektorową nad F i jest zamknięte na komutatory z elementami A , czyli jest ideałem w A . Gdyby J był trywialny to elementy I leżałyby w centrum B , czyli A miałoby nietrywialne centrum. Ale A jest prosta, więc na trywialne centrum. Czyli J byłby nietrywialnym ideałem w A . Jako że A jest prosta oznacza to że $J = A$. Ale elementy J należą do I , czyli $I = B$ i B jest prosta. $\square$

Komentarz: Otrzymane wyniki pokazują że klasyfikacja prostych algebr Liego nad dowolnymi ciałami w pewnym sensie sprowadza się do klasyfikacji algebr centralnych prostych. Mianowicie jeśli prosta algebra nie jest centralna prosta to można ją rozważać jako algebrę nad większym ciałem nad którym jest ona centralna prosta. Przy tym ograniczenie skalarów z większych ciała do oryginalnego ciała da nam algebry proste, dokładniej da nam wszystkie algebry proste które nie są centralne proste. Algebry centralne proste pozostają proste przy algebraicznych rozszerzeniach ciała skalarów, co upraszcza ich badanie. Ale algebry nieizomorficzne nad K mogą stać się izomorficzne nad rozszerzeniem K . Jeśli po rozszerzeniu ciała skalarów z K do algebraicznego rozszerzenia K algebra A_K jest izomorficzna z algebrą B to mówimy że A jest formą B nad K . Zbadanie wszystkich form nad K danej algebry prostej B wymaga dodatkowych pojęć i dość znacznego wysiłku.