

1 Konstrukcje uniwersalne 2

Niech R będzie pierścieniem przemiennym zaś M będzie R -modułem. Powiemy że algebra z jedynką $S(M)$ nad R która jest łączna i przemienna z odwzorowaniem R -liniowym $\iota : M \rightarrow S(M)$ jest algebrą symetryczną M wtedy i tylko wtedy gdy każde odwzorowanie R -liniowe f z M w algebrę z jedynką T nad R która jest łączna i przemienna jednoznacznie przedłuża się do homomorfizmu h z $S(M)$ w T , tzn. istnieje dokładnie jedno h takie że $f = h \circ \iota$.

Można to zilustrować diagramem

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow \iota & \nearrow h & \\ S(M) & & \end{array}$$

Lemat 1.1 *Algebra symetryczna istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Dowód: Można wziąć $T(M)/I$ gdzie I jest ideałem w $T(M)$ generowanym przez $\{xy - yx : x, y \in M\}$. Jednoznaczność z dokładnością do izomorfizmu to standardowy argument. $\square$

Lemat 1.2 *Niech M będzie modulem wolnym nad R z bazą $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$. Wtedy $S(M)$ jest izomorficzne z pierścieniem wielomianów od X_α .*

Dowód: Odwzorowanie R -liniowe na M jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na bazie. Wynika stąd że pierścień wielomianów ma własność uniwersalną $S(M)$, czyli jest izomorficzny z $S(M)$. $\square$

Teraz niech M będzie algebrą Liego nad R . W algebrze obwiedniej $U(M)$ niech U_k oznacza podmoduł generowany przez produkty elementów M długości mniejszej lub równej k . Niech V_k oznacza U_k/U_{k-1} (iloraz jako R -moduł).

Lemat 1.3 *Przy założeniach jak wyżej*

$$U_k U_l \subset U_{k+l}.$$

Ponadto mnożenie w $U(M)$ daje dobrze zdefiniowane odwzorowanie z $V_k \times V_l$ w V_{k+l} . To daje mnożenie na

$$V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Jeśli M jest modulem wolnym to V z tym mnożeniem jest izomorficzne z $S(M)$.

Dowód: Zawieranie $U_k U_l \subset U_{k+l}$ jest oczywiste. Wynika stąd że produkt elementów V_k i V_l w $U(M)$ jest zdefiniowany jednoznacznie z dokładnością do elementu $U_{k-1}U_l + U_k U_{l-1} \subset U_{k+l-1}$, czyli jest jednoznaczny jako element V_{k+l} . Jeśli M jest modulem wolnym, to baza $U(M)$ jest taka sama jak w przypadku przemiennym zaś iloczyn elementów U_k i U_l różni się od przypadku przemiennego tylko o elementy niższego rzędu. Czyli iloczyn elementów V_k i V_l nie zależy od

nawiasu Liego i jest taki sam jak w przypadku przemennym. Ale w przypadku przemennym wynik jest oczywisty. $\square$

Lemat 1.4 *Istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $\Delta : U(L) \rightarrow U(L) \otimes U(L)$ taki że dla $x \in L$ mamy*

$$\Delta(\iota(x)) = \iota(x) \otimes 1 + 1 \otimes \iota(x).$$

Jeśli R jest ciałem charakterystyki 0 to

$$\{y \in U(L) : \Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y\} = \iota(L).$$

Dowód: Pierwsza część jest jasna. By pokazać drugą zauważmy że wtedy L jest modulem wolnym. Najpierw rozpatrzmy przypadek przemienności. Wtedy $U(L)$ jest izomorficzne z pierścieniem wielomianów $R(X)$, $U(L) \otimes U(L)$ odpowiada $R(X, Y)$, zaś odwzorowanie Δ odpowiada podstawieniu

$$\Delta(p(X)) = p(X + Y).$$

Czyli równość

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

oznacza

$$p(X + Y) = p(X) + p(Y).$$

Jeśli p jest wielomianem jednorodnym stopnia n to podstawiając $Y = X$ mamy

$$2^n p(X) = p(2X) = p(X + X) = p(X) + p(X) = 2p(X)$$

czyli $2 = 2^n$ co w charakterystyce 0 jest możliwe tylko wtedy gdy $n = 1$ czyli p jest liniowy, czyli odpowiedni element $U(M)$ jest obrazem elementu M .

W ogólnym przypadku patrzymy na część najwyższego rzędu n w x jako element pierścienia V z poprzedniego lematu. Do niego stosuje się część przemienności, co oznacza że $n = 1$, czyli $x \in R \oplus L$. Łatwo zauważyć że część z R nie spełnia naszego warunku, więc $x \in L$, co kończy dowód. $\square$

1.1 Szeregi Liego

W tej części zakładamy że R jest ciałem charakterystyki 0. Rozpatrzmy najpierw wolną algebrę Liego generowaną przez zbiór X , tzn. algebrę Liego F nad R z odwzorowaniem $\iota : X \rightarrow F$ taką że każde odwzorowanie f z X w algebrę Liego A nad R jednoznacznie przedłuża się do homomorfizmu z F w A . Dokładniej, przy danym f istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr Liego h z F w A taki że $f = h \circ \iota$. Istnienie h można dowodzić na wiele sposobów, w szczególności działą standartowa konstrukcja przez podobiekt (podalgebrę) odpowiedniego dużego produktu.

Lemat 1.5 *Niech M będzie modulem wolnym nad R z bazą X i niech F będzie wolną algebrą Liego generowaną przez X . Wtedy uniwersalna algebra obwiednia $U(F)$ jest naturalnie izomorficzna z algebrą tensorową $T(M)$, zaś F jest izomorficzna z podalgebrą Liego w $T(M)$ generowaną przez obraz X .*

Dowód. Niech S będzie algebrą łączną nad R . Z własności modułu wolnego odwzorowanie f z X w S jednoznacznie przedłuża się do odwzorowania R -liniowego z M w S . Z własności algebry tensorowej $T(M)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm h z $T(M)$ w S przedłużający f . Niech F' oznacza podalgebrę Liego w $T(M)$ generowaną przez X . Pokazane wyżej istnienie i jednoznaczność h oznacza że $T(M)$ jest uniwersalną algebrą obwiednią dla F' . A więc mając dane odwzorowanie f z X w A otrzymamy dokładnie jeden homomorfizm h z $T(M)$ w $U(A)$ taki że $\iota_A f = h \circ \iota_X$ gdzie ι_A oznacza włożenie z A w $U(A)$ zaś ι_X oznacza włożenie X w $T(M)$. Zakładamy że R jest ciałem, więc algebra Liego A nad R automatycznie jest modułem wolnym, czyli ι_A jest różnowartościowa. A więc ograniczając h do F' otrzymamy homomorfizm algebr Liego z F' w A . Oczywiście ten homomorfizm jest jedyny bo X generuje F' . A więc F' ma własność uniwersalną algebry wolnej, czyli F' jest izomorficzne z F . $\square$

Przypomnijmy sobie że

$$T(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M^{\otimes k}.$$

Czyli każdy element $T(M)$ jest skończoną sumą elementów z $M^{\otimes k}$ dla różnych k . Intuicyjnie gdy M jest modułem wolnym generowanym przez X , to $T(M)$ to algebra nieprzemienne wielomianów z zmiennymi X . Chcemy teraz przejść do formalnych szeregów potęgowych. Intuicyjnie są to nieskończone sumy elementów z $M^{\otimes k}$ dla rosnących k . Dokładniej,

$$\tilde{T}(M) = \prod_{k=0}^{\infty} M^{\otimes k}$$

czyli $\tilde{T}(M)$ to produkt, czyli elementy to ciągi których k -ta składowa należy do $M^{\otimes k}$. Dodawanie w $\tilde{T}(M)$ jest po składowych. Mnożenie elementów z $M^{\otimes k}$ i $M^{\otimes l}$ jak dla $T(M)$ daje nam element $M^{\otimes(k+l)}$. Dla danego n istnieje tylko skończenie wiele liczb naturalnych k i l takich że $k+l = n$, a więc dowolną składową produktu w $\tilde{T}(M)$ można wyliczyć przy pomocy skończonej ilości operacji, czyli mnożenie w $\tilde{T}(M)$ jest dobrze zdefiniowane.

Na $\tilde{T}(M)$ można rozpatrywać topologię, manowicie na $M^{\otimes k}$ bierzemy topologię dyskretną, zaś na $\tilde{T}(M)$ topologię produktową. W tej topologii ciąg t_n jest zbieżny do granicy t wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego k istnieje l takie że dla każdego $n \geq l$ różnica $t_n - t$ ma zerowe składowe w $M^{\otimes m}$ dla $m = 0, \dots, k$.

Będziemy potrzebowali kompozycję zwykłych formalnych szeregów potęgowych z elementami $\tilde{T}(M)$ których człon stały (tzn. składowa w R) jest zerem. Rząd $\text{ord}(x)$ elementu $x \in \tilde{T}(M)$ definiujemy jako maksymalne k takie że składowe x w $M^{\otimes m}$ dla $m = 0, \dots, k$ są równe zero. Jeśli $x = 0$ to przyjmujemy że rząd x jest nieskończony. Zauważmy że ciąg elementów $\{t_n\}$ jest zbieżny w $\tilde{T}(M)$ do t wtedy i tylko wtedy gdy $\liminf \text{ord}(t_n - t) = \infty$.

Lemat 1.6 $\text{ord}(xy) = \text{ord}(x) + \text{ord}(y)$. $\text{ord}(x + y) \geq \max(\text{ord}(x), \text{ord}(y))$ z równością jeśli $\text{ord}(x) \neq \text{ord}(y)$. Jeśli $x_n \in \tilde{T}(M)$, $\liminf \text{ord}(x_n) = \infty$ to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

jest zbieżny w $\tilde{T}(M)$. Jeśli $\text{ord}(x) > 0$, $a_n \in R$, to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny w $\tilde{T}(M)$.

Dowód. Równość $\text{ord}(xy) = \text{ord}(x) + \text{ord}(y)$ wynika wprost z definicji mnożenia w $\tilde{T}(M)$. Podobnie nierówność (i przypadek równości) $\text{ord}(x + y) \geq \max(\text{ord}(x), \text{ord}(y))$ wynika wprost z definicji dodawania w $\tilde{T}(M)$. Zauważmy że jeśli $\text{ord}(x_n) > k$ dla $n \geq l$, to odpowiednie x_n mają zerową składową w $M^{\otimes k}$. A więc suma pierwszych l składników szeregu wyznacza nam jednoznacznie k -tą składową sumy całego szeregu. Widać też że sumy częściowe zbiegają do tak wyznaczonej sumy szeregu. Jako że $\text{ord}(a_x x^n) \geq \text{ord}(x)$, to ostatni szereg jest zbieżny. $\square$

Zwykle formalne szeregi potęgowe jednej zmiennej można traktować jako przypadek szczególny konstrukcji wyżej odpowiadający jednoelementowemu zbiorowi X . A więc mamy zdefiniowane ord dla zwykłych szeregów formalnych. Ponadto ostatni punkt lematu wyżej oznacza że jest dobrze zdefiniowana kompozycja zwykłego szeregu potęgowego z szeregiem potęgowym mającym wyraz wolny równy zero. Możemy też rozpatrywać zwykłe szeregi potęgowe jednej zmiennej x z wyrazem wolnym równym zero jako półgrupę względem składania szeregów. Wtedy szereg jednowyrazowy x jest jedyneką.

Lemat 1.7 *Niech t będzie zwykłym formalnym szeregiem potęgowym. t ma odwrotność względem kompozycji szeregów z $\text{ord}(y) > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\text{ord}(t) = 1$.*

Dowód. By znaleźć lewą lub prawą odwrotność musimy rekursywnie rozwiązać odpowiedni układ równań. Dla lewej odwrotności chcemy by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = x.$$

Zauważmy że

$$\text{ord}\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n\right) \geq 2$$

zaś $\text{ord}(x) = 1$, czyli równość wyżej jest możliwa tylko gdy $\text{ord}(t) = 1$. Podobnie prawa odwrotność może istnieć tylko gdy $\text{ord}(t) = 1$.

Dalej będziemy zakładać że $\text{ord}(t) = 1$. Gdy znane są $a_1, \dots, a_k$ takie że

$$\text{ord}\left(\left(\sum_{n=1}^k a_n t^n\right) - x\right) \geq k + 1$$

to zauważmy że $\text{ord}(t^{k+1}) = k + 1$, a więc w iloczynie $a_{k+1} t^{k+1}$ możemy uzyskać dowolną wartość współczynnika przy x^{k+1} , zaś współczynniki przy niższych potęgach x są zerami. Pozwala to dobrać a_{k+1} tak by wyzerować współczynnik

przy x^{k+1} w kompozycji, tzn. uzyskać nierówność

$$\text{ord}\left(\left(\sum_{n=1}^{k+1} a_n t^n\right) - x\right) \geq k + 2.$$

A więc faktycznie można rekursywnie wyznaczyć wszystkie a_n tak by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ był lewą odwrotnością względem złożenia dla t . Podobnie można wyznaczyć prawą odwrotność. Skoro istnieje lewa i prawa odwrotność to są one równe i szereg jest odwracalny. $\square$

Zauważmy że dla zwykłych formalnych szeregów potęgowych możemy zdefiniować różniczkowanie, różniczkując wyraz po wyrazie. Różniczkowanie spełnia regułę Leibnitza, zachodzi też wzór na pochodną złożenia. Ponadto szereg jest stały (jedyne niezerowy wyraz to wyraz wolny) wtedy i tylko wtedy gdy jego pochodna jest zerem.

Dalej potrzebne nam będą szeregi $\log(1+x)$ i $\exp(x)$ zdefiniowane jako

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Mamy

$$\partial_x \exp(x) = \exp(x),$$

$$\partial_x \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Teraz rozpatrujemy działanie zwykłych szeregów potęgowych na $\tilde{T}(M)$ przez składanie. Zauważmy że jest to działanie półgrupy, tzn. kompozycja szeregów działa przez kompozycję działań.

Lemat 1.8 *Odwzorowanie $t \mapsto \exp(t)$ odwzorowuje różnowartościowo szeregi z wyrazem wolnym równym zero na szeregi z wyrazem wolnym równym 1. Podobnie $t \mapsto \log(t)$ odwzorowuje różnowartościowo szeregi z wyrazem wolnym równym 1 na szeregi z wyrazem wolnym równym zero. Dla szeregu t z wyrazem wolnym równym 0 mamy $\exp(\log(1+t)) = 1+t$ i $\log(\exp(t)) = t$.*

Dowód. Zauważmy najpierw że wystarczy to pokazać dla zwykłych formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej. Mianowicie, wzory dają nam odwrotność, zaś przy działaniu na $\tilde{T}(M)$ kompozycja przechodzi na kompozycję, więc dostaniemy wzory na odwrotność w $\tilde{T}(M)$, co implikuje odpowiednią różnowartościowość i to że odwzorowanie jest na.

Dla zwykłych szeregów zauważmy że $\text{ord}(\exp(x) - 1) = 1$ czyli kompozycja z $\exp(x) - 1$ jest odwracalna co implikuje że $\exp$ jest różnowartościowe i na szeregi z wyrazem wolnym 1. Licząc pochodne mamy

$$\partial_x \log(\exp(x)) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)} = 1$$

czyli

$$\log(\exp(x)) = x + c$$

Ale łatwo zauważyć że wyraz wolny $\log(\exp(x))$ to zero, czyli mamy równość $\log(\exp(x)) = x$. Z odwracalności $\exp(x) - 1$ wynika teraz równość $\exp(\log(1 + x)) = 1 + x$. $\square$

Element $t \in \tilde{T}(M)$ nazywamy szeregiem Liego jeśli wszystkie wyrazy t są elementami wolnej algebry Liego.

Zauważmy że $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$ można traktować jako podzbiór produktu

$$\prod_{k,l} M^{\otimes k} \otimes M^{\otimes l}$$

który jest izomorficzny z $\tilde{T}(M \oplus M)$. A więc definicja rzędu i pojęcie elementu jednorodnego mają sens dla elementów $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$. Zbieżność ma sens, ale potencjalnie ciąg Cauchy'ego mógłby dać jako granicę element $\tilde{T}(M \oplus M)$ który nie odpowiada elementowi $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$. Jednakże niżej granice będą leżeć w $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$.

Jak poprzednio możemy zdefiniować odwzorowanie Δ z $\tilde{T}(M)$ w $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$ i że zachodzi analog lematu 1.4. Mianowicie, w przypadku wolnej algebry Liego Δ jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na zbiorze generatorów X . Wynika stąd że Δ przeprowadza elementy jednorodne w $T(M)$ na elementy jednorodne w $T(M) \otimes T(M)$, co oznacza że również w $\tilde{T}(M)$ odwzorowanie Δ działa składowa po składowej odwzorowując elementy jednorodne na elementy jednorodne tak samo jakby to były elementy $T(M)$. A więc kryterium z lematu 1.4 można użyć dla każdej składowej z osobna. Czyli mamy

Lemat 1.9 *x jest szeregiem Liego wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Lemat 1.10 *x jest szeregiem Liego wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x).$$

Dowód: Mamy

$$\begin{aligned} \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) &= (\exp(x \otimes 1) \cdot \exp(1 \otimes x)) \\ &= (\exp(x) \otimes 1) \cdot (1 \otimes \exp(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x) \end{aligned}$$

czyli

$$\exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \exp(x) \otimes \exp(x).$$

A więc jeśli jest szeregiem Liego to

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \exp(x) \otimes \exp(x)$$

czyli zachodzi podana równość. Jeśli zachodzi równość

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x)$$

to

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$$

czyli

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

co oznacza że x jest szeregiem Liego. $\square$

Lemat 1.11 *Niech x i y będą szeregiem Liego i niech*

$$z = \log(\exp(x) \exp(y)).$$

Wtedy z jest szeregiem Liego.

Dowód: Z założenia

$$\exp(z) = \exp(x) \exp(y)$$

i

$$\Delta(\exp(z)) = \Delta(\exp(x) \exp(y)).$$

Jako że x i y są szeregiem Liego to

$$\begin{aligned} \Delta(\exp(x) \exp(y)) &= \Delta(\exp(x)) \Delta(\exp(y)) = (\exp(x) \otimes \exp(x)) \cdot (\exp(y) \otimes \exp(y)) \\ &= (\exp(x) \exp(y)) \otimes (\exp(x) \exp(y)) \end{aligned}$$

czyli

$$\Delta(\exp(z)) = \exp(z) \otimes \exp(z)$$

co oznacza że z jest szeregiem Liego. $\square$

2 Wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa

W poprzedni lemat mówi że:

$$z = \log(\exp(x) \exp(y)).$$

jest szeregiem Liego.

Chcielibyśmy podać jawne przedstawienie szeregu z przy pomocy komutatorów. Najpierw wprowadzamy uproszczoną notację, mianowicie rekursywnie definiujemy

$$[x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_1, [x_2, \dots, x_k]].$$

Na $T(M)$ definiujemy odwzorowanie π wzorem

$$\pi(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k) = [x_1, x_2, \dots, x_k]$$

dla $x_i \in M$.

Lemat 2.1 *π ograniczone do wolnej algebry Liego F jest różniczkowaniem. Jeśli $x \in F$ jest elementem jednorodnym rzędu k to $\pi(x) = kx$.*

Dowód. Rozpatrujemy działanie dołączone F na sobie i rozszerzymy je do działania $U(F) = T(M)$ na F . To działanie będziemy oznaczać przez $*$, tzn. $a * b$ oznacza działanie elementu $a \in T(M)$ na $b \in F$. Jeśli $a \in F$ to mamy $a * b = \text{ad}_a(b) = [a, b]$. Jeśli $a = a_1 a_2 \dots a_k$, $a_i \in F$ to

$$a * b = \text{ad}_{a_1} \text{ad}_{a_2} \dots \text{ad}_{a_k}(b).$$

Jeśli $a, b \in T(M)$ to zapisując każde jako kombinację liniową produktów elementów M mamy $\pi(ab) = a * \pi(b)$, a więc dla $a, b \in F$ mamy

$$\begin{aligned} \pi([a, b]) &= \pi(ab) - \pi(ba) = a * \pi(b) - b * \pi(a) \\ &= [a, \pi(b)] - [b, \pi(a)] = [a, \pi(b)] + [\pi(a), b]. \end{aligned}$$

a więc faktycznie π ograniczone do F jest różniczkowaniem.

Jeśli $x \in M$ to $\pi(x) = x$. Ale na $T(M)$ możemy zdefiniować różniczkowanie δ wzorem $\delta(x) = kx$ dla x będących elementami jednorodnymi rzędu k . To różniczkowanie po obcięciu do F da nam różniczkowanie F . Ponieważ π i δ są dwoma różniczkowaniami F które zgadzają się na generatorach F to zgadzają się na całym F . $\square$

Lemat 2.2 (Wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa) Niech x i y będą szeregami Liego i niech

$$z = \log(\exp(x) \exp(y)).$$

Wtedy

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1, \dots, k} \frac{[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}]}{(l_1 + m_1 + \dots + l_k + m_k) l_1! m_1! \dots l_k! m_k!}$$

gdzie dla $m_k > 0$

$$[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}] = \text{ad}_x^{l_1} \text{ad}_y^{m_1} \dots \text{ad}_x^{l_k} \text{ad}_y^{m_k-1}(y)$$

zaś dla $m_k = 0$ (wtedy $l_k > 0$)

$$[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}] = \text{ad}_x^{l_1} \text{ad}_y^{m_1} \dots \text{ad}_x^{l_k-1}(x).$$

Dowód. Wynik wystarczy pokazać gdy x i y są obrazami elementów X , tzn. są elementami jednorodnymi rzędu 1 (ogólny przypadek otrzymamy jako homomorficzny obraz powyższego). Mamy

$$\begin{aligned} \exp(x) \exp(y) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^l y^m}{l! m!} = 1 + \sum_{l+k \geq 1} \frac{x^l y^m}{l! m!}, \\ (\exp(x) \exp(y) - 1)^k &= \sum_{l_1 + m_1 \geq 1} \dots \sum_{l_k + m_k \geq 1} \frac{x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}}{l_1! m_1! \dots l_k! m_k!} \\ &= \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1, \dots, k} \frac{x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}}{l_1! m_1! \dots l_k! m_k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= \log(\exp(x) \exp(y)) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\exp(x) \exp(y) - 1)^k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1, \dots, k} \frac{x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}}{l_1! m_1! \dots l_k! m_k!}.
\end{aligned}$$

Produkt $x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}$ jest rzędu $l_1 + m_1 + \dots + l_k + m_k$, czyli stosując do powyższego Lemat 2.1 otrzymamy

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1, \dots, k} \frac{\pi(x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k})}{(l_1 + m_1 + \dots + l_k + m_k) l_1! m_1! \dots l_k! m_k!}$$

gdzie π było zdefiniowane przed Lematem 2.1. W sformułowaniu obecnego lematu zapisujemy π w terminach ad_x i ad_y . $\square$

Wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zawiera wiele wyrazów które są zerowe, ponadto wyrazy są liniowo zależne. Po uproszczeniach wyrazy do rzędu 3 to:

$$x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]).$$

Otrzymany szereg jest czysto formalny, ale w niektórych ważnych przypadkach jest zbieżny. Zauważmy że na poziomie szeregów formalnych biorąc $\exp$ otrzymaliśmy grupę: mnożenie szeregów jest łączne zaś $\exp(-x)$ daje odwrotność $\exp(x)$. A więc używając wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa otrzymamy strukturę grupy na zbiorze szeregów Liego.

Lemat 2.3 *Jeśli algebra Liego N jest nilpotentna stopnia j to szereg powyżej redukuje się do skończonej sumy i zadaje na N strukturę grupy. Jeśli dodatkowo N jest skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem liczb rzeczywistych, to otrzymana grupa jest grupą Liego, N jest izomorficzna z jej algebrą Liego zaś odwzorowanie eksponencjalne jest tożsamością.*

Dowód. Zauważmy że jeśli $l_1 + m_1 + \dots + l_k + m_k > j$ to

$$[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}] = 0$$

czyli uwzględniając że $l_i + m_i \geq 1$ czyli $k \leq j$ to mamy tylko skończenie wiele niezerowych wyrazów. Na poziomie szeregów Liego mamy strukturę grupy, sumowanie daje homomorfizm, więc na N dostaniemy strukturę grupy. Jeśli N jest skończenie wymiarową algebrą na liczbami rzeczywistymi to skończona suma niezerowych wyrazów szeregu daje wielomian, czyli funkcję gładką. Odwrotność $x \in N$ to po prostu $-x$, czyli operacje grupowe są gładkie, czyli N z takim działaniem jest grupą Liego. Następnie, dla $x \in N$ odwzorowanie $t \mapsto tx$ daje podgrupę jednoparametrową z wektorem stycznym x , czyli odwzorowanie eksponencjalne jest identycznością N . Następnie

$$(tx) \cdot (sy) = tx + sy + \frac{1}{2}ts[x, y] + r$$

gdzie r zawiera tylko człony wyższego rzędu w t lub s . Czyli

$$(tx) \cdot (sy) \cdot (tx)^{-1} = (tx) \cdot (sy) \cdot (-tx) = sy + \frac{1}{2}ts[x, y] + \frac{1}{2}ts[y, -x] + r$$

$$= sy + [x, y] + r$$

gdzie r zmienia się od lini do lini, ale zawiera tylko człony wyższego rzędu. Teraz

$$\text{Ad}_{tx}(y) = \partial_s(tx) \cdot (sy) \cdot (tx)^{-1} = y + t[x, y] + O(t^2),$$

$$\text{ad}_x(y) = \partial_t \text{Ad}_{tx}(y) = [x, y],$$

czyli nawias Liego naszej struktury grupowej zgadza się z oryginalnym nawiasem Liego. $\square$

Lemat 2.4 *Jeśli algebra Liego A jest przestrzenią Banach i istnieje stała M taka że dla każdych $x, y \in A$ zachodzi nierówność $\|[x, y]\| \leq M\|x\|\|y\|$, to istnieje $r > 0$ takie że szereg Campbella-Bakera-Hausdorffa jest zbieżny dla $\|x\| + \|y\| < r$. Ponadto otrzymane działanie jest łączne o ile pośrednie wyniki są w podanym obszarze.*

Dowód. Niech $s = \max(1, M)$. Wtedy

$$\|[x_1, x_2, \dots, x_k]\| \leq s^k \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_k\|$$

czyli

$$\|[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}]\| \leq (s\|x\|)^{l_1 + \dots + l_k} (s\|y\|)^{m_1 + \dots + m_k}$$

co oznacza że

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1, \dots, k} \frac{[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}]}{(l_1 + m_1 + \dots + l_k + m_k) l_1! m_1! \dots l_k! m_k!} \right\| \\ & \leq \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1, \dots, k} \frac{(s\|x\|)^{l_1 + \dots + l_k} (s\|y\|)^{m_1 + \dots + m_k}}{l_1! m_1! \dots l_k! m_k!} = (\exp(s\|x\|) \exp(s\|y\|) - 1)^k \\ & \quad (\exp(s(\|x\| + \|y\|)) - 1)^k. \end{aligned}$$

Teraz wybieramy r tak by $\exp(sr) - 1 \leq 1$. Wtedy widać że szereg jest bezwzględnie zbieżny. Gdy pośrednie wyniki też spełniają powyższy warunek to łączność wynika z łączności dla szeregu formalnego. $\square$

Powyższy lemat oznacza istnienie tak zwanej grupy lokalnej, dla której można zdefiniować niezmiennicze pola wektorowe i algebrę Liego tak jak w przypadku grupy Liego. Podobnie jak to zrobiliśmy dla algebr nilpotentnych można pokazać że nawias Liego grupy lokalnej zgadza się z oryginalnym nawiasem Liego.

Lemat 2.5 *Jeśli G jest grupą Liego, to na G można wprowadzić strukturę rzeczywistą analityczną. W tej strukturze odwzorowanie eksponencjalne jest rzeczywiste analityczne.*

Dowód. Algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy G jest skończenie wymiarowa a więc można na niej wprowadzić normę i stosuje się poprzedni lemat. A więc istnieje lokalna

grupa Liego L z algebrą Liego G i taka że operacje w L są rzeczywiste analityczne. Rozważamy teraz produkt $G \times L$ i diagonalną podalgebrę, tzn. podalgebrę składającą się z elementów postaci (X, X) . Podobnie jak w dowodzie lematu o istnieniu podgrupy zadaną podalgebrą twierdzenie Frobeniusa implikuje istnienie podgrupy lokalnej w $G \times L$ odpowiadającej podalgebrze diagonalnej. Ta podgrupa daje nam dyfeomorfizm lokalnej podgrupy w L z lokalną podgrupą w G . Jako że działanie w L jest rzeczywiste analityczne daje to nam mapę otoczenia jedynki U w G taką że w tym otoczeniu działanie jest rzeczywiste analityczne. Biorąc otoczenie V takie że $V^{-1} = V$ i $VV \subset U$ możemy przy pomocy przesunięć V zbudować atlas rzeczywisty analityczny dla G . $\square$