

# Grupy i algebry Liego, wykład 12

W. Hebisch

12 stycznia 2026

## 1 Struktura algebr półprostych

Przypominam lemat z poprzednich notatek:

**Lemat 1.1** *Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 i niech  $\text{Der}(A)$  będzie algebrą Liego różniczkowań  $A$ . Wtedy odwzorowanie  $x \mapsto \text{ad}_x$  zadaje izomorfizm  $A$  z  $\text{Der}(A)$*

**Lemat 1.2** *Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech  $C$  będzie podalgebrą Cartana w  $A$ .  $C$  jest przemienna i dla  $x \in C$  operator  $\text{ad}_x$  jest półprosty.*

Dowód: Dla  $x, y \in C$  mamy

$$K(x, y) = \sum \alpha(x) \alpha(y) \dim(A_\alpha)$$

Jeśli  $y \in [C, C]$  to wtedy  $\alpha(y) = 0$  dla dowolnego  $\alpha$  takiego że  $A_\alpha \neq \{0\}$ . A więc wtedy  $K(x, y) = 0$ , czyli  $y = 0$  bo forma Killinga obcięta do  $C$  jest niezdegenerowana. Konsekwentnie  $[C, C] = \{0\}$  i  $C$  jest przemienna.

Dla  $x \in C$  niech  $\text{ad}_x = S + N$  będzie rozkładem  $\text{ad}_x$  na część półprostą i nilpotentną.  $S$  jest różniczkowaniem  $A$ : dla  $y \in A_\alpha$ ,  $z \in A_\beta$  mamy  $[y, z] \in A_{\alpha+\beta}$ ,  $S(y) = \alpha(x)y$ ,  $S(z) = \beta(x)z$  a więc

$$S([y, z]) = (\alpha + \beta)(x)[y, z] = [\alpha(x)y, z] + [y, \beta(x)z] = [S(y), z] + [y, S(z)].$$

Na mocy 1.1 istnieją  $s, n \in A$  takie że  $\text{ad}_s = S$  i  $\text{ad}_n = N$ .  $S$  komutuje z każdym operatorem komutującym z  $\text{ad}_x$ , a więc w szczególności  $S$  komutuje z  $\text{ad}_y$  dla dowolnego  $y \in C$ . A więc jeszcze raz używając 1.1 widzimy że  $s$  komutuje z  $C$ , czyli  $s$  należy do normalizatora  $C$ , czyli  $s \in C$ . Skoro  $x = s + n$  to również  $n \in C$ . Jednakże  $\text{ad}_n$  jest nilpotentny, czyli  $\alpha(n) = 0$  dla  $\alpha$  takich że  $A_\alpha \neq \{0\}$ , czyli jak poprzednio  $n = 0$ , co oznacza że  $\text{ad}_x = S$  jest półprosty.  $\square$

Niech  $\Lambda = \{\alpha \neq 0 : A_\alpha \neq \{0\}\}$ . Przy założeniach jak wyżej forma Killinga jest niezdegenerowana na  $C$ , a więc dla  $\alpha \in \Lambda$  istnieje dokładnie jeden  $h_\alpha \in C$  takie że  $\alpha(x) = K(h_\alpha, x)$  dla dowolnego  $x \in C$ .

**Lemat 1.3** • Jeśli  $e \in A_\alpha$ ,  $f \in A_{-\alpha}$  to  $[e, f] = K(e, f)h_\alpha$ .

•  $\alpha(h_\alpha) \neq 0$

- $\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  rozpinają  $C$
- Jeśli  $e \in A_\alpha$ ,  $f \in A_{-\alpha}$ ,  $K(e, f) \neq 0$  to podalgebra  $A$  generowana przez  $e$ ,  $f$  i  $h_\alpha$  jest izomorficzna z  $\mathfrak{sl}(2, F)$
- Przestrzeń  $A_\alpha$  są jednowymiarowe
- Jeśli  $\alpha, t\alpha \in \Lambda$  to  $t \in \{-1, 1\}$
- Jeśli  $\alpha, \beta \in \Lambda$  to  $2K(h_\alpha, h_\beta)/K(h_\alpha, h_\alpha)$  jest liczbą całkowitą

Dowód: Niech  $e \in A_\alpha$ ,  $f \in A_{-\alpha}$ . Dla  $x \in C$  mamy

$$K([e, f], x) = -K(f, [e, x]) = \alpha(x)K(f, e) = K(f, e)K(h_\alpha, x)$$

czyli  $K([e, f] - K(e, f)h_\alpha, x) = 0$  co na mocy niezdegenerowania  $K$  na  $C$  oznacza że  $[e, f] = K(e, f)h_\alpha$ . A więc pokazaliśmy pierwszy punkt.

Na mocy lematu Weyla dla dowolnego  $\beta \in \Lambda$  mamy  $\beta(h_\alpha) = c_{\alpha, \beta}\alpha(h_\alpha)$ , czyli  $\alpha(h_\alpha) = 0$  implikowałoby  $\beta(h_\alpha) = 0$ , czyli (jak w dowodzie 1.2)  $h_\alpha$  byłoby ortogonalne do  $C$  względem formy Killinga i  $h_\alpha = 0$ . Lecz  $\alpha \neq 0$ , więc  $h_\alpha \neq 0$  co oznacza że  $\alpha(h_\alpha) \neq 0$ .

$A$  jest półprosta, więc  $A = [A, A] = \text{lin}[A_\alpha, A_\beta]$ . Dla  $\alpha \neq -\beta$  dostajemy składniki rozkładu różne od  $C$ , a więc  $C = \text{lin}_{\alpha \neq 0}[A_\alpha, A_{-\alpha}]$ . Na mocy poprzedniego punktu  $[A_\alpha, A_{-\alpha}]$  jest rozpinane przez  $h_\alpha$ , czyli  $C = \text{lin}\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ .

Aby pokazać czwarty punkt niech  $g = 2f/(\alpha(h_\alpha)K(e, f))$ . Wtedy  $K(e, g) = K(e, f)/(\alpha(h_\alpha)K(e, f)) = 2/\alpha(h_\alpha)$ ,  $h = [e, g] = K(e, g)h_\alpha = 2h_\alpha/\alpha(h_\alpha)$  i  $\alpha(h) = 2\alpha(h_\alpha)/\alpha(h_\alpha) = 2$ . A więc  $[h, e] = \alpha(h)e = 2e$  i  $[h, g] = -\alpha(h)g = -2g$  co oznacza że  $h, e, g$  spełniają te same relacje komutacji co

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli  $h \mapsto H$ ,  $e \mapsto X$ ,  $g \mapsto Y$  zadaje izomorfizm.

Przypuśćmy teraz że  $A_\alpha$  ma wymiar większy niż 1. Wtedy istniałby  $z \in A_\alpha$  taki że  $z \neq 0$ , lecz  $K(z, g) = 0$ . A więc  $[g, z] = K(z, g)h_\alpha = 0$ , czyli  $z$  generowały skończenie wymiarowy moduł  $M$  nad  $\mathfrak{sl}(2, F)$  taki że wszystkie wartości własne  $h$  byłyby dodanie. Dokładniej niech  $z_0 = 0$  i  $z_{k+1} = [e, z_k]$ . Zauważmy że istnieją stałe  $c_k$  takie że  $[g, z_k] = c_k z_{k-1}$  dla  $k \geq 0$  (gdzie  $c_0 = 0$  i  $z_{-1} = 0$ ). Mianowicie indukcyjnie  $[g, z_{k+1}] = [g, [e, z_k]] = [[g, e], z_k] + [e, [g, z_k]] = -[h, z_k] + [e, c_k z_{k-1}] = -2k z_k + c_k z_k$  czyli  $M = \text{lin}\{\text{ad}_e^k(z) : k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$  bo ta podprzestrzeń jest niezmiennicza na działanie  $h, e, g$ . Ale taki moduł  $M$  nie istnieje co oznacza że przestrzeń  $A_\alpha$  jest jednowymiarowa.

Podobnie, jeśli  $A_{t\alpha}$  jest nietrywialne to  $h$  musi mieć całkowitą wartość własną na  $A_{t\alpha}$ , czyli  $2t \in \mathbb{Z}$ . Ale rola  $\alpha$  i  $t\alpha$  jest symetryczna, czyli również  $2/t \in \mathbb{Z}$ . Gdyby  $t = 2$  to  $A_{2\alpha} = \text{ad}_e(A_\alpha)$  lecz jest to niemożliwe bo  $A_\alpha$  jest rozpinane przez  $e$  i  $\text{ad}_e(A_\alpha) = \{0\}$ . Przez symetrię wykluczone jest również  $t = -2$ ,  $t = 1/2$ , i  $t = -1/2$ . A więc jedne możliwości które pozostają to  $t = -1$  lub  $t = 1$ .

Aby pokazać ostatni punkt rozważmy podalgebrę  $A$  generowaną przez  $h_\alpha, e, f$ . Jak wiemy ta algebra jest izomorficzna z  $\mathfrak{sl}(2, F)$ . Niech  $H = 2h_\alpha/K(h_\alpha, h_\alpha)$ . Z opisu skończenie wymiarowych modułów nad  $\mathfrak{sl}(2, F)$  wiemy że w dowolnym takim module  $H$  ma całkowite wartości własne. Rozważmy działanie  $H$  na  $x \in$

$A_\beta: [H, x] = 2\beta(h_\alpha)/K(h_\alpha, h_\alpha) = 2K(h_\beta, h_\alpha)/K(h_\alpha, h_\alpha)$ , czyli  $2K(h_\beta, h_\alpha)/K(h_\alpha, h_\alpha)$  jako wartość własna  $H$  jest liczbą całkowitą.  $\square$

Przykład: Niech  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ . Wiadomo że macierze diagonalne o śladzie 0 dają podalgebrę Cartana  $C$  w  $\mathfrak{g}$ . Niech

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

i niech  $e_{i,k}$  dla  $i, k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq k$  będzie macierzą taką że na przecięciu wiersza  $i$  i kolumny  $k$  jest 1 a pozostałe elementy są zerami. Łatwo sprawdzić że  $[a, e_{i,k}] = (\lambda_i - \lambda_k)e_{i,k}$ . A więc funkcjonały pierwastkowe to  $\alpha_{i,k} = \lambda_i - \lambda_k$  zaś odpowiednia przestrzeń  $V_{\alpha_{i,k}}$  jest jednowymiarowa i rozpinana przez  $e_{i,k}$ . Jest sześć macierzy  $e_{i,k}$  z  $i \neq k$ , razem z macierzami z  $C$  daje to rozkład  $\mathfrak{g}$  na sumę prostą. Jako że  $\mathfrak{g}$  składa się na macierzy o śladzie 0 to dla  $a$  z  $C$  zachodzi  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . A więc

$$K(a, a) = 2((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2) =$$

$$2((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2) + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 =$$

$$6(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

czyli forma Killinga na  $C$  to 6 razy obcięcie do  $C$  euklidesowego produktu skalarnego. W szczególności  $h_\alpha$  to  $\frac{1}{6}\alpha$ . Jawnie, gdy  $\alpha_{1,2}$  jest reprezentowany jako wektor w  $\mathbb{C}^3$  mamy

$$\alpha_{1,2} = (1, -1, 0),$$

czyli

$$h_{\alpha_{1,2}} = \frac{1}{6}(1, -1, 0).$$

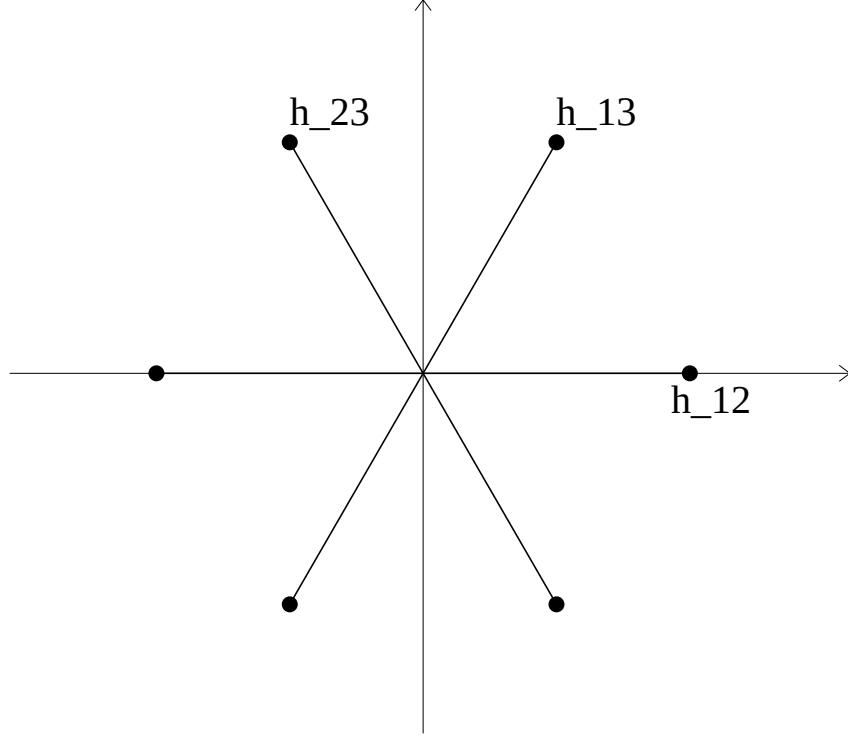
Podobnie

$$h_{\alpha_{1,3}} = \frac{1}{6}(1, 0, -1),$$

$$h_{\alpha_{2,3}} = \frac{1}{6}(0, 1, -1)$$

i  $h_{\alpha_{2,1}} = -h_{\alpha_{1,2}}$ ,  $h_{\alpha_{3,1}} = -h_{\alpha_{1,3}}$ ,  $h_{\alpha_{3,2}} = -h_{\alpha_{2,3}}$ . Widać że  $K(h_\alpha, h_\alpha) = \frac{1}{3}$ . Podobnie  $K(h_{\alpha_{1,2}}, h_{\alpha_{1,3}}) = \frac{1}{6}$  i  $K(h_{\alpha_{1,2}}, h_{\alpha_{2,3}}) = -\frac{1}{6}$ . Wynika stąd że kąt między  $h_{\alpha_{1,2}}$  a  $h_{\alpha_{1,3}}$  jest równy  $\pi/3$ , zaś kąt między  $h_{\alpha_{1,2}}$  i  $h_{\alpha_{2,3}}$  jest równy  $2\pi/3$ . A więc odpowiednio uporządkowane  $\alpha$  są wierzchołkami sześciokąta równobocznego.

Można to zilustrować następującym obrazkiem:



**Lemat 1.4**  $\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Q}$  i  $\alpha(h_\alpha) > 0$ . Niech  $V = \text{lin}_{\mathbb{Q}}\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ . Forma Killinga obcięta do  $V$  przyjmuje wartości wymierne i jest dodatnio określona. Ponadto, jeśli  $S \subset \Lambda$  i  $\Delta = \{h_\alpha : \alpha \in S\}$  jest bazą  $C$  nad  $F$ , to  $\Delta$  jest bazą  $V$ .

Dowód:  $\alpha(h_\alpha) = K(h_\alpha, h_\alpha) = \sum_{\beta \in \Lambda} \beta(h_\alpha)^2 = \sum_{\beta \in \Lambda} (r_{\alpha, \beta} \alpha(h_\alpha))^2$  czyli

$$\alpha(h_\alpha) = \frac{1}{\sum_{\beta \in \Lambda} r_{\alpha, \beta}^2},$$

więc  $\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Q}$  i  $\alpha(h_\alpha) > 0$ .

Jeśli  $h = \sum q_\alpha h_\alpha$ , to  $\beta(h) = \sum_{\alpha, \beta \in \Lambda} q_\alpha r_{\alpha, \beta} \alpha(h_\alpha)$  czyli  $\beta(h) \in \mathbb{Q}$ . Jeśli  $h_1, h_2 \in V$  to  $K(h_1, h_2) = \sum_{\beta \in \Lambda} \beta(h_1) \beta(h_2) \in \mathbb{Q}$  i  $K(h, h) = \sum_{\beta \in \Lambda} \beta(h)^2 \geq 0$ . Jeśli  $K(h, h) = 0$  to dla każdego  $\beta \in \Lambda$  mamy  $\beta(h) = 0$  i  $h$  jest ortogonalne względem formy Killinga do  $C$ , czyli  $h = 0$ .

Niech  $\Delta$  jak wyżej będzie bazą  $C$  nad  $F$ ,  $\tilde{V} = \text{lin}_{\mathbb{Q}}(\Delta)$  i niech  $\beta \in \Lambda$ . Dla  $h_\alpha \in \Delta$  mamy  $\beta(h_\alpha) = K(h_\beta, h_\alpha) \in \mathbb{Q}$  czyli  $\beta \in \tilde{V}^*$ , czyli istnieje  $\tilde{h} \in \tilde{V}$  taki że  $\beta(h) = K(\tilde{h}, h)$  dla  $h \in \tilde{V}$ . Jednakże  $\Delta \subset \tilde{V}$  jest bazą  $C$  nad  $F$ , więc  $\beta(h) = K(\tilde{h}, h)$  dla  $h \in C$ , czyli  $\tilde{h} = h_\beta$ , a więc  $h_\beta \in \tilde{V}$ .  $\square$

Niech  $V$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem  $F$  charakterystyki 0. Zakładamy że na  $V$  jest zadany iloczyn skalarny. Dla wektora  $v \in V$  odbicie  $\sigma_v$  w kierunku  $v$  definiujemy wzorem

$$\sigma_v(x) = x - 2 \frac{\langle v, x \rangle v}{\langle v, v \rangle}$$

gdzie zakładamy że  $\langle v, v \rangle \neq 0$ . Dla  $F = \mathbb{R}$  jest to klasyczna definicja, ale te same własności dostaniemy dla innych ciał.

**Lemat 1.5** *Istnieje automorfizm  $\phi : A \mapsto A$  taki że  $\phi(C) = C$ ,  $\phi(h_\alpha) = -h_\alpha$  i  $\phi(h) = h$  dla  $h \in C$  takich że  $\alpha(h) = 0$ . Innymi słowy,  $\phi|_C$  jest odbiciem w kierunku  $h_\alpha$ .*

Dowód: Wybieramy  $e \in A_\alpha$ ,  $f \in A_{-\alpha}$ , tak by  $\alpha([e, f]) = 2$ . Wtedy podalgebra  $A$  generowana nad  $\mathbb{Q}$  przez  $[e, f], e, f$  jest izomorficzna z  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{Q})$ . Niech

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy izomorfizmie  $[e, f]$  przechodzi na  $H$ ,  $e$  przechodzi na  $X$ ,  $f$  przechodzi na  $Y$ . Zauważmy że  $\text{ad}_e$  i  $\text{ad}_f$  są nilpotentnymi automorfizmami  $A$ , dlatego  $\psi_1 = \exp(\text{ad}_e) = \sum \text{ad}_e^k / k!$  i  $\psi_2 = \exp(-\text{ad}_f) = \sum (-\text{ad}_f)^k / k!$  są dobrze zdefiniowanymi automorfizmami  $A$ . Pokażemy że  $\phi = \psi_1 \psi_2 \psi_1$  jest pożądanym automorfizmem. Mianowicie, jeśli  $h \in C$  i  $\alpha(h) = 0$  to  $[h, e] = [h, f] = 0$ , czyli  $\text{ad}_e(h) = \text{ad}_f(h) = 0$  i konsekwentnie  $\psi_1(h) = \psi_2(h) = 0$ , więc  $\phi(h) = h$ . Pozostaje pokazać że  $\phi([e, f]) = -[e, f]$ . Dzięki izomorfizmowi algebry generowanej przez  $[e, f], e, f$  z  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{Q})$  jest to ćwiczenie na mnożenie macierzy 2 na 2. Dokładniej, wystarczy wykonać obliczenia używając  $\text{ad}_X$  i  $\text{ad}_Y$  zamiast  $\text{ad}_e$  i  $\text{ad}_f$ . Dla  $Z \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{Q})$  mamy  $\text{ad}_X(Z) = XZ - ZX = L_X(Z) - R_X(Z)$  gdzie  $L_X$  jest operatorem mnożenia z lewej strony, zaś  $R_X$  operatorem mnożenia z prawej strony. Ponieważ mnożenie z lewej komutuje z mnożeniem z prawej mamy  $\exp(\text{ad}_X) = L_{\exp(X)} R_{\exp(-X)}$  i konsekwentnie  $\phi([e, f])$  przechodzi przy izomorfizmie na  $L_{\exp(X)} \exp(-Y) \exp(X) R_{\exp(-X)} \exp(Y) \exp(-X) H$ . Teraz

$$\exp(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(-Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(X) \exp(-Y) \exp(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\exp(X)} \exp(-Y) \exp(X) R_{\exp(-X)} \exp(Y) \exp(-X) H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -H.$$

□

Definicja: Niech  $V$  będzie jak w definicji odbicia. Mówimy że skończony podzbiór  $\Lambda \subset V$  jest *systemem pierwiastków* jeśli  $0 \notin \Lambda$ ,  $\Lambda$  rozpina  $V$  i dla każdego  $v \in \Lambda$  mamy  $\sigma_v(\Lambda) \subset \Lambda$ . Mówimy że  $\Lambda$  jest *krystalograficzny* jeśli

$2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\beta, \beta\rangle \in \mathbb{Z}$  dla dowolnych  $\alpha, \beta \in \Lambda$ . Mówimy że  $\Lambda$  jest zredukowany jeśli dla  $\alpha, t\alpha \in \Lambda$  implikuje że  $t \in \{-1, 1\}$ .

**Definicja:** Niech  $\Lambda \subset V$  będzie systemem pierwiastków. Grupę generowaną przez operatory  $\sigma_v$  gdzie  $v \in \Lambda$  nazywamy grupą Weila systemu  $\Lambda$ .

**Definicja** Powiemy że układ pierwiastków  $\Lambda$  na  $V$  jest rozkładalny, jeśli  $V = V_1 \oplus V_2$  i  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$  gdzie  $\Lambda_i = \Lambda \cap V_i$  dla  $i = 1, 2$ . Powiemy że układ pierwiastków jest nierozkładalny jeśli nie jest rozkładalny.

**Lemat 1.6** *Jeśli  $\Lambda$  jest układem pierwiastków na  $V$  to istnieją podprzestrzenie  $V_i$  i układy pierwiastków  $\Lambda_i$  na  $V_i$  takie że*

$$V = \oplus_i V_i,$$

$$\Lambda = \bigcup_i \Lambda_i$$

*i  $\Lambda_i$  jest nierozkładalny. Taki rozkład jest jednoznaczny. Ponadto, jeśli  $\Lambda$  jest układem pierwiastków algebry Liego  $A$  jak wyżej, to istnieją podalgebry  $B_i$  takie że*

$$A = \oplus_i B_i$$

*i  $\Lambda_i$  jest układem pierwiastków  $B_i$ .*

*Dowód:* Jeśli mamy rozkład  $\Lambda$  jak wyżej to zauważmy że  $V_i$  są wzajemnie ortogonalne. Mianowicie, odbicie względem  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  przekształca  $\lambda_2 \in \Lambda_2$  na  $\lambda_2 + c\lambda_1$  dla pewnego  $c$ . Jednakże  $\lambda_2 + c\lambda_1$  jest elementem  $\Lambda$  wtedy i tylko wtedy gdy  $c = 0$ . To zaś oznacza że  $\lambda_1$  jest ortogonalne do  $\lambda_2$ . Jako że  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  był dowolny i  $\Lambda_1$  rozpinia  $V_1$  to  $V_1$  jest ortogonalne do  $\lambda_2$ . Rozumując podobnie widzimy że  $V_1$  jest ortogonalne do  $V_2$  i ogólniej  $V_i$  jest ortogonalne do  $V_j$  dla  $i \neq j$ .

Teraz na  $\Lambda$  wprowadzamy relację  $r$  tak że  $r(\alpha, \beta)$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\alpha$  i  $\beta$  nie są ortogonalne. Niech  $r^*$  będzie domknięciem tranzytywnym  $r$ .  $r^*$  jest relacją równoważności. Jako  $\Lambda_i$  bierzemy klasy abstrakcji  $r^*$  a jako  $V_i$  przestrzenie rozpinane przez  $\Lambda_i$ . Z określenia widać że  $V_i$  są wzajemnie ortogonalne, czyli dają rozkład  $V$ . Jak pokazaliśmy rozkładalność implikuje ortogonalność składników rozkładu. Ale z definicji  $\Lambda_i$  nie da się podzielić na wzajemnie ortogonalne podzbiory, więc  $\Lambda_i$  są nierozkładalne. Co więcej, jeśli  $\Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  jest rozkładem  $\Lambda$  jak wyżej i  $\Gamma_1 \cap \Lambda_i \neq \emptyset$  to  $\Lambda_i \subset \Gamma_1$ . Przy tym elementy  $\Gamma_1 - \Lambda_i$  (tu jest różnica teoriomnogościowa) są ortogonalne do  $\Lambda_i$  i dałyby rozkład  $\Gamma_1$  czyli jeśli  $\Gamma_1$  jest nierozkładalne to  $\Lambda_i = \Gamma_1$ . To daje jednoznaczność rozkładu.

Jeśli  $\Lambda = \{h_\alpha\}$  jest układem pierwiastków  $A$  to bierzemy

$$\tilde{\Lambda}_i = \{\alpha : h_\alpha \in \Lambda_i\},$$

$$C_i = \text{lin}(\Lambda_i),$$

$$B_i = C_i \oplus \oplus_{\alpha \in \tilde{\Lambda}_i} A_\alpha.$$

Zauważmy najpierw że

$$A = \oplus_i B_i$$

jako przestrzeń wektorowa. Pozostaje pokazać że  $B_i$  są podalgebrami i że wzajemnie komutują.

Dla  $i \neq j$  ze względu na ortogonalność  $C_i$  do  $\Lambda_j$   $C_i$  komutuje z  $A_\alpha$  dla  $\alpha \in \tilde{\Lambda}_i$ , czyli  $C_i$  komutuje z  $B_j$ . Dla  $\alpha \in \tilde{\Lambda}_i$  i  $\beta \in \tilde{\Lambda} = \bigcup_j \tilde{\Lambda}_j$  mamy  $\alpha + \beta \in \tilde{\Lambda}$  implikuje  $\beta \in \tilde{\Lambda}_i$ . A więc  $B_i$  są podalgebrami i dla  $i \neq j$   $B_i$  komutuje z  $B_j$ .  $\square$

Uwaga: Dla celów badania algebr Liego w charakterystyce 0 wystarczyłyby układy pierwiastków w przestrzeniach wektorowych nad  $\mathbb{Q}$ . W charakterystyce 0 badanie układów zredukowanych i krystalograficznych można sprowadzić do badania układów pierwiastków nad  $\mathbb{Q}$ . Jednakże, istnieją niekrystalograficzne układy pierwiastków które wymagają nieco większego ciała, tzn. skończonego rozszerzenia algebraicznego  $\mathbb{Q}$ . Ze względów technicznych niektóre rozumowania wygodniej jest przeprowadzić w większym ciele np.  $\mathbb{R}$ . Jak się okaże, przy badaniu układów pierwiastków istotny jest porządek na pierwiastkach i dlatego w wielu miejscach przydaje się ciało uporządkowane. Porządek na pierwiastkach daje się wprowadzić również bez porządku w ciele (również w charakterystyce skończonej), ale jest to technicznie znacznie trudniejsze. By uniknąć nieporęcznych problemów technicznych w dalszym ciągu będziemy zakładać że ciało nad którym rozpatrujemy system pierwiastków jest podciałem ciała liczb rzeczywistych.

**Lemat 1.7** *Niech  $A, V, \Lambda, e_\alpha$  będą jak wyżej.  $[e_\alpha, e_\beta] = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\alpha + \beta \notin \Lambda$ .*

Dowód: Oczywiście  $\alpha + \beta \notin \Lambda$  implikuje  $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ . Trzeba pokazać że  $\alpha + \beta \in \Lambda$  implikuje  $[e_\alpha, e_\beta] \neq 0$ . Rozpatrzmy zbiór  $\Lambda_{\beta, \alpha}$  pierwiastków postaci  $\beta + k\alpha$  gdzie przebiega wszystkie wartości całkowite takie że  $\beta + k\alpha \in \Lambda$ . Odpowiednie  $e_\gamma$  dla  $\gamma \in \Lambda_{\beta, \alpha}$  rozpinają przestrzeń  $A_{\beta, \alpha}$  reprezentacji podalgebry generowanej przez  $h_\alpha e_\alpha, f_\alpha$ , która jak wiemy jest izomorficzna z  $\mathfrak{sl}(2, f)$ . Jako że przestrzenie  $A_\gamma$  są jednowymiarowe i  $h_\alpha$  ma różną wartość własną dla różnych  $\gamma$ , to  $A_{\beta, \alpha}$  daje moduł prosty. W szczególności  $[e_\alpha, \beta + k\alpha] = 0$  tylko wtedy gdy  $\beta + k\alpha$  jest skajnym elementem  $\Lambda_{\beta, \alpha}$ , tzn.  $\beta + (k+1)\alpha$  nie jest pierwiastkiem.  $\square$

**Lemat 1.8** *Niech  $A, V, \Lambda$  będą jak wyżej (na  $V$  rozpatrujemy iloczyn skalarny wyznaczony przez formę Killinga).  $\Lambda$  jest zredukowanym krystalograficznym układem pierwiastków na  $V$ .  $A$  jest wyznaczona przez  $\Lambda$  z dokładnością do izomorfizmu. Dla dowolnego zredukowanego krystalograficznego układu pierwiastków  $\Lambda$  istnieje półprosta algebra Liego  $A_{\Lambda, F}$  nad  $F$  z  $\Lambda$  jako układem pierwiastków. Ponadto istnieje półprosta algebra Liego  $A_\Lambda$  nad  $\mathbb{Q}$  taka że jej podalgebra Cartana diagonalizuje się i  $\Lambda$  jest jej układem pierwiastków (innymi słowy, w odpowiedniej bazie można  $A$  zdefiniować nad liczbami wymiernymi).*

Szkic dowodu: Na mocy lematu 1.5  $\Lambda$  jest układem pierwiastków. Podobnie  $\Lambda$  jest zredukowanym układem krystalograficznym. A priori  $\Lambda$  zależy od wyboru podalgebry Cartana. Jednakże pokazaliśmy że wszystkie podalgebry Cartana w  $A$  są sprzężone, tzn. dla dowolnych podalgebr Cartana  $C_1, C_2 \subset A$  istnieje automorfizm  $A$  przeprowadzający  $C_1$  na  $C_2$ . Oznacza to że układ pierwiastków jest wyznaczony przez  $A$  z dokładnością do izomorfizmu. Dzięki lematowi 1.6 resztę wystarczy pokazać dla nierozkładalnych układów pierwiastków. Istnienie algebry z zadany układem pierwiastków dowodzimy dla każdego nierozkładalnego

układu pierwiastków z osobna. Pomijam dowód pozostałej części twierdzenia.  $\square$

Pokazaliśmy że rozkładalne układy pierwiastków odpowiadają sumom prostym algebr. Teraz chcemy wyznaczyć strukturę nierozkładalnych układów pierwiastków, to nam da pełny opis algebr półprostych nad ciałami algebraicznie domkniętymi charakterystyki 0.

**Lemat 1.9** *Niech  $\Lambda$  będzie układem pierwiastków w przestrzeni dwuwymiarowej nad  $\mathbb{R}$  zaś  $e_\alpha = \alpha/|\alpha|$  dla  $\alpha \in \Lambda$ . Wtedy  $e_\alpha$  są wierzchołkami  $2n$ -kąta foremnego dla pewnego  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Dowód:  $e_\alpha$  są wektorami jednostkowej długości, każdy z nich wyznacza punkt na okręgu jednostkowym. Ponumerujemy  $\alpha$  tak by te punkty wypadały po kolei, tzn.  $e_{\alpha_{j-1}}$  i  $e_{\alpha_{j+1}}$  są najbliższymi punktami do  $e_{\alpha_j}$  (i leżą po różnych stronach). Skoro układ pierwiastków jest niezmienniczy na odbicia w kierunku swoich elementów, to  $\sigma_{e_{\alpha_j}}(e_{\alpha_{j-1}}) = -e_{\alpha_{j+1}}$ , czyli kąt między  $e_{\alpha_{j-1}}$  a  $e_{\alpha_j}$  jest taki sam jak kąt między  $e_{\alpha_j}$  a  $e_{\alpha_{j+1}}$ , co oznacza że  $e_\alpha$  są wierzchołkami wielokąta foremnego. Ponieważ  $\alpha \in \Lambda$  implikuje  $-\alpha \in \Lambda$ , moc  $\{e_\alpha\}$  jest parzysta.  $\square$

Komórką Weila nazywamy maksymalny zbiór  $S$  taki że dla  $\omega \in S$  mamy  $\forall \alpha \in \Lambda \langle \alpha, \omega \rangle \neq 0$  i każde  $\langle \alpha, \omega \rangle$  ma stały znak na  $S$ .

Rozpatrujemy teraz przez chwilę systemy pierwiastków w przypadku gdy ciało podstawowe to liczby rzeczywiste. W tym przypadku komórki Weila są składowymi spójną zbioru  $\{\omega \in V : \forall \alpha \in \Lambda \langle \alpha, \omega \rangle \neq 0\}$ . Mianowicie, na zbiorze spójnym funkcja ciągła nie mająca zer ma stały znak, czyli na składowych wyżej  $\langle \alpha, \omega \rangle$  ma stały znak, czyli komórka Weila jest sumą składowych wyżej. Jednakże komórki Weila są skończonymi przekrojami półprzestrzeni otwartych, a więc są otwarte i wypukłe. A więc są też spójne, czyli jest dokładnie jedna składowa.

**Lemat 1.10** *Gdy ciałem podstawowym są liczby rzeczywiste to grupa Weila działa tranzytywnie na zbiorze komórek Weila.*

*Dowód:* Niech  $M$  będzie zbiorem podprzestrzeni  $V$  zadanych równaniami  $\langle \alpha, \omega \rangle = 0$ ,  $\langle \beta, \omega \rangle = 0$  dla  $\alpha, \beta \in \Lambda$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Każdy element  $M$  jest podprzestrzenią  $V$  kowymiaru 2. Twierdzimy że  $H = V - \bigcup_{Z \in M} Z$  jest spójny. Mianowicie, łatwo pokazać że jeśli  $U$  jest otwartym spójnym podzbiorem  $V$  to  $U - Z$  gdzie  $Z$  jest przestrzenią kowymiaru 2 też jest spójny. Czyli indukcyjnie  $H$  jest spójny.  $H$  jest sumą domknięć komórek Weila. Niech niech  $S$  będzie domknięciem w  $H$  ustalonej komórki Weila zaś  $T = WS$  orbitą  $S$  względem grupy Weila  $W$ . Wtedy  $T$  jest podzbiorem domkniętym  $H$ . Niech  $R$  będzie sumą domknięć w  $H$  komórek Weila nie należących do orbity  $S$ . Łącznie  $R$  i  $T$  zawierają wszystkie komórki Weila, więc ich suma jest gesta w  $H$ .  $R$  i  $T$  jako skończona suma zbiorów domkniętych są domknięte, więc  $H = R \cup T$ . Przestrzeń spójną nie da się przedstawić jako sumę rozłącznych zbiorów domkniętych, więc albo  $R$  jest pusty (co chemy pokazać), albo istnieje  $x \in R \cap T$ . Wnętrza komórek Weila są rozłączne, więc  $x$  leży na brzegu komórki, czyli istnieje  $\alpha$  takie że  $\langle \alpha, x \rangle = 0$ . Z określenia  $M$  i  $H$  takie  $\alpha$  jest jednoznacznie wyznaczone. A więc istnieje domknięta komórka  $P$  z  $T$  leżąca po jednej stronie hiperpłaszczyzny  $\langle \alpha, \omega \rangle = 0$  i domknięta komórka  $Q$  z  $R$  leżąca po drugiej stronie tej hiperpłaszczyzny, mające



wspólny punkt  $x$ . Wtedy  $\sigma_\alpha(P) = Q$ . Ale  $\sigma_\alpha$  jest elementem grupy Weila, więc równość wyżej przeczy temu że  $Q$  nie jest w orbicie  $S$  względem  $W$ . Otrzymana sprzeczność pokazuje że  $R$  jest puste i  $T = H$ , czyli  $W$  działa tranzytywnie.  $\square$

**Lemat 1.11** *Gdy ciało podstawowe jest ciałem  $\mathbb{R}$  to grupa Weila działa tranzytywnie na zbiorze komórek Weila.*

*Dowód:* Nasze ciało  $K$  jest zanurzone w liczbach rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Odpowienio  $V$  można zanurzyć w przestrzeni wektorowej  $V_{\mathbb{R}}$  nad  $\mathbb{R}$ . Możemy też rozszerzyć działanie  $W$  do  $V_{\mathbb{R}}$ . Komórka Weila w  $V$  jednoznacznie wyznacza komórkę Weila w  $V_{\mathbb{R}}$ . Do działania  $W$  na  $V_{\mathbb{R}}$  stosuje się poprzedni lemat. Ale skoro komórki rozszerzają się jednoznacznie to wynik pozostaje prawdziwy dla komórek w  $V$ .  $\square$

Niech  $\omega \in V$  będzie wektorem takim że  $(\alpha, \omega) \neq 0$  dla  $\alpha \in \Lambda$ ,  $\Lambda_+ = \{\alpha \in \Lambda : (\alpha, \omega) > 0\}$ .  $\Lambda_+$  nazywamy zbiorem pierwiastków dodatnich.  $\Lambda_+$  zależy od wyboru  $\omega$ , dokładnie od wyboru komórki Weila do której należy  $\omega$ . Jednakże Lemat 1.11 pokazuje że różne wybory dają równoważną teorię, tzn. można przejść między różnymi wyborami przy pomocy elementu grupy Weila.

**Lemat 1.12** *Niech  $\Delta \subset \Lambda_+$  będzie zbiorem tych elementów  $\Lambda_+$  które dają wszystkie kierunki ekstremalne stożka wypukłego generowanego przez  $\Lambda_+$ . Wtedy dla  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$  mamy  $(\alpha, \beta) \leq 0$ . Co więcej kąt pomiędzy  $\alpha$  a  $\beta$  to  $(n-1)\pi/n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{Z}$ . Ponadto  $\Delta$  jest bazą  $V$ .*

*Dowód:* Wiadomo że dowolny element właściwego domkniętego stożka wypukłego jest kombinacją liniową o współczynnikach dodatnich elementów zadających kierunki ekstremalne. Czyli każdy element  $\Lambda_+$  jest kombinacją liniową elementów z  $\Delta$ . Ponieważ  $\Lambda = \Lambda_+ \cup -\Lambda_+$  to również każdy element z  $\Lambda$  jest kombinacją liniową elementów z  $\Delta$ . Lecz  $\Lambda$  rozpina  $V$  czyli  $\Delta$  rozpina  $V$ . Jeśli  $V$  jest jednowymiarowe to  $\Delta$  składa się z jednego elementu i teza jest oczywista. W przeciwnym razie dla  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$  rozpatrzmy podprzestrzeń  $V_{\alpha, \beta} = \text{lin}\{\alpha, \beta\} \subset V$ . Niech  $\Omega = \Lambda \cap V_{\alpha, \beta}$  zaś  $\Omega_+ = \Lambda_+ \cap V_{\alpha, \beta}$ .  $\Omega$  jest systemem pierwiastków w przestrzeni dwuwymiarowej zaś  $\Omega_+$  odpowiednim układem pierwiastków dodatnich. Z lematu wiemy że po unormowaniu elementy  $\Omega$  są wierzchołkami  $2n$ -kąta foremnego.  $n \geq 2$ , przy tym dla  $n = 2$  mamy czworokąt i widać że  $\alpha$  i  $\beta$  są ortogonalne. Dla  $n > 2$  mamy  $|\Omega_+| = n$ , czyli pomiędzy  $\alpha$  a  $\beta$  musi być  $n-1$  innych pierwiastków, czyli kąt pomiędzy  $\alpha$  a  $\beta$  to  $(n-1)\pi/n$ . Dla  $n > 2$  to implikuje że  $(\alpha, \beta) < 0$ .

Aby pokazać że  $\Delta$  jest liniowo niezależne rozważmy kombinację liniową  $\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha$ . Niech  $D_+ = \{\alpha \in \Delta : a_\alpha > 0\}$ ,  $D_- = \{\alpha \in \Delta : a_\alpha < 0\}$  i niech  $w = \sum_{\alpha \in D_+} a_\alpha \alpha$ ,  $v = \sum_{\alpha \in D_-} a_\alpha \alpha$ . Ponieważ dla  $\alpha \in \Lambda_+$  mamy  $(\omega, \alpha) > 0$  to  $(\omega, w) = \sum_{\alpha \in D_+} a_\alpha (\omega, \alpha) > 0$  czyli  $w \neq 0$  o ile  $D_+ \neq \emptyset$ . Podobnie  $v \neq 0$  o ile  $D_- \neq \emptyset$ . Jeśli nie wszystkie współczynniki rozważanej kombinacji liniowej znikają to co najmniej jeden z  $D_+$  lub  $D_-$  jest niepusty. Jeśli dokładnie jeden jest niepusty to poprzednie uwagi pokazują że ta kombinacja jest niezerowa. Jeśli oba są niepuste to  $(w+v, w+v) = (w, w) + 2(w, v) + (v, v)$ . Następnie

$(w, v) = \sum_{\alpha \in D_+, \beta \in D_-} a_\alpha a_\beta (\alpha, \beta) \geq 0$  bo  $a_\alpha > 0$ ,  $a_\beta < 0$ ,  $(\alpha, \beta) \leq 0$ , czyli  $(w + v, w + v) \geq (w, w) + (v, v) > 0$ , czyli  $w + v \neq 0$  co pokazuje liniową niezależność.  $\square$

Diagramem Coxetera-Dynkina (lub krótko diagramem Dynkina) związanym z  $\Lambda$  nazywany graf którego wierzchołkami są elementy  $\Delta$  zaś krawędzie są pomiędzy takimi  $\alpha, \beta \in \Delta$  że  $(\alpha, \beta) < 0$ . Przy tym krawędzi przypisujemy wagę  $n$  jeśli kąt pomiędzy  $\alpha$  a  $\beta$  to  $(n - 1)\pi/n$ .

Ogólniej, możemy rozpatrywać układy wektorów  $\Delta$  takie że dla  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$  kąt pomiędzy  $\alpha$  a  $\beta$  to  $(n - 1)\pi/n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 2$ .

W diagramie Dynkina zredukowanego układu pierwiastków mogą się pojawić pierwiastki różnej długości, wtedy krawędź rysujemy jako strzałkę skierowaną w kierunku krótszego wektora.

**Lemat 1.13** *Diagram Dynkina nierozkładalnego zredukowanego krystalograficznego układu pierwiastków należy do jednej z wymienionych niżej rodzin:*

- $A_n$ :  $n$  wierzchołków połączonych w łańcuch krawędziami wagi 3,
- $B_n$ :  $n$  wierzchołków z  $n \geq 2$  połączonych w łańcuch gdzie wagi krawędzi są 3 za wyjątkiem ostatniego połączenia które ma wagę 4 zaś strzałka jest w kierunku ostatniego wierzchołka,
- $C_n$ :  $n$  wierzchołków z  $n \geq 3$  połączonych w łańcuch gdzie wagi krawędzi są 3 za wyjątkiem ostatniego połączenia które ma wagę 4 zaś strzałka jest w kierunku przedostatniego wierzchołka,
- $D_n$ :  $n$  wierzchołków z  $n \geq 4$  gdzie  $n - 1$  wierzchołki są połączone w łańcuch, zaś przedostatni wierzchołek łańcucha jest połączony z ostatnim wierzchołkiem (który nie ma innych połączeń), przy tym wagi połączeń to 3,
- $E_6, E_7, E_8$ .  $n$  wierzchołków z  $n = 6, 7, 8$  gdzie  $n - 1$  wierzchołki są połączone w łańcuch, zaś drugi od końca wierzchołek łańcucha jest połączony z ostatnim wierzchołkiem (który nie ma innych połączeń), przy tym wagi połączeń to 3,
- $F_4$ : cztery wierzchołki połączone w łańcuch, gdzie wagi skrajnych połączeń to 3 zaś waga środkowego połączenia to 4, przy tym środkowe połączenie jest skierowane (ale wybór kierunku daje izomorficzne diagramy),
- $G_2$ : dwa wierzchołki połączone krawędzią wagi 6 (która jest skierowana).

Ponadto istnieje niekrystalograficzny układ pierwiastków w przestrzeni wymiaru 3 i w przestrzeni wymiaru 4 (w obu przypadkach diagram to łańcuch ze skrajną krawędzią wagi 5 a pozostałymi wagi 3) i rodzina niekrystalograficznych układów na płaszczyźnie.

Uwaga: W zadaniach badaliśmy układ pierwiastków  $\mathfrak{sl}(n+1, F)$ . Z tego łatwo wynika że odpowiedni diagram Dynkina to  $A_n$ . Podobnie, diagram Dynkina algebry  $\mathfrak{so}(2n+1, F)$  to  $B_n$  zaś diagram Dynkina algebry  $\mathfrak{so}(2n, F)$  to  $D_n$ . Wreszcie diagram Dynkina algebry  $\mathfrak{sp}(2n, F)$  to  $C_n$ .

**Lemat 1.14** *Diagram Dynkina nie zawiera cykli.*

Dowód. Jeśli  $\alpha_i$  dla  $i = 1, \dots, k$  stanowią cykl, to biorąc  $e_i = \alpha_i/|\alpha_i|$  i  $v = \sum_{i=1}^k e_i$  mam  $(v, v) = \sum_{i=1}^k (e_i, e_i) + 2 \sum_{i \neq j} (e_i, e_j)$ . Dla  $i \neq j$  połączonych krawędzią kąt między  $e_i$  a  $e_j$  to co najmniej  $2\pi/3$ , czyli  $(e_i, e_j) \leq -1/2$ . W cyklu mamy  $k$  par  $i, j$  połączonych krawędziami, co oznacza że  $(v, v) \leq 0$ , co dałoby sprzeczność z liniową niezależnością  $\alpha_i$ .  $\square$

Dla  $\alpha \in \Delta$  niech  $e_\alpha = \alpha/|\alpha|$ . Dla  $\alpha, \beta \in \Delta$  niech  $q_{\alpha, \beta} = (e_\alpha, e_\beta)$

**Lemat 1.15** *Niech  $S \in \Delta$ ,  $\alpha \notin S$ . Wtedy  $\sum_{\beta \in S} q_{\alpha, \beta}^2 < 1$*

Dowód: Bez zmniejszania ogólności możemy zakładać że  $q_{\alpha, \beta} \neq 0$  dla  $\beta \in S$ . Z poprzedniego lematu (braku cykli) wynika teraz że  $q_{\beta_1, \beta_2} = 0$  dla  $\beta_1, \beta_2 \in S$ , czyli  $\{e_\beta \in S\}$  jest bazą ortonormalną pewnej podprzestrzeni  $W \subset V$ .  $e_\alpha \notin W$ , czyli rzut  $e_\alpha$  na  $W$  ma długość mniejszą niż 1. Lecz kwadrat tej długości wynosi  $\sum_{\beta \in S} (e_\alpha, e_\beta)^2 = \sum_{\beta \in S} q_{\alpha, \beta}^2$ .  $\square$

**Lemat 1.16** *Spójny diagram Dynkina z krawędzią wagi  $\geq 6$  ma dwa wierzchołki.*

Dowód. Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą wierzchołkami połączonymi krawędzią wagi  $\geq 6$ . Gdyby było więcej wierzchołków to istniałaby wierzchołek  $\gamma$  połączony albo z  $\alpha$  albo z  $\beta$ . Bez utraty ogólności można zakładać że  $\gamma$  jest połączony z  $\alpha$ . Waga 6 oznacza że  $q_{\alpha, \beta}^2 \geq 3/4$ ,  $q_{\alpha, \gamma}^2 \geq 1/4$  co dałoby sprzeczność z poprzednim lematem.

**Lemat 1.17** *Wierzchołek diagramu Dynkina jest połączony z co najwyżej trzema innymi wierzchołkami. Jeśli jest połączony z trzema wierzchołkami to wagi krawędzi to 3. Żaden wierzchołek nie należy do dwu krawędzi wagi  $\geq 4$ .*

Dowód. To wynika bezpośrednio z lematy o sumie  $q_{\alpha, \beta}^2$ :  $q_{\alpha, \beta}^2 \geq 1/4$ , a jeśli waga jest większa niż 3 to  $q_{\alpha, \beta}^2 \geq 1/2$   $\square$

**Lemat 1.18** *Diagram Dynkina zawiera co najwyżej jeden punkt rozgałęzienia i co najwyżej jedną krawędź wagi  $\geq 4$ . Jeśli jest punkt rozgałęzienia to wszystkie wagi to 3.*

Lematy powyżej i kilka następnych lematów tego typu w sumie daje dowód podanego wyżej twierdzenia o klasyfikacji układów pierwiastków.