

Grupy i algebry Liego, wykład 1 i 2

W. Hebisch

13 październik 2023

Definicja: Grupa Liego to grupa ze strukturą rozmaitości różniczkowej taka że operacje grupowe są gładkie (C^∞).

Przykłady:

1. Prosta rzeczywista czy ogólniej $\mathbb{R}^n$ z dodawaniem.
2. Grupa Heisenberga, tzn. $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadany wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Ta grupa jest izomorficzna z grupą macierzy postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathbb{R}^2$ z mnożeniem zadany wzorem

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(x_2)y_1 + y_2).$$

Ta grupa jest izomorficzna z grupą przekształceń afinicznych prostej zachowujących orientację.

4. Grupy macierzowe takie jak

- Grupa $GL(n, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy odwracalnych n na n .
- Grupa $SL(2, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1.
- Grupa przekształceń ortogonalnych $\mathbb{R}^3$ (czy ogólniej $\mathbb{R}^n$).

5. Grupa izometrii płaszczyzny (czy ogólniej $\mathbb{R}^n$).

Pole wektorowe na rozmaitości różniczkowej M to odwzorowanie X z M w TM takie że $\pi(X)$ gdzie π jest naturalnym rzutowaniem z TM na M jest identycznością. Innymi słowy $X(x) \in TM_x$.

Gładkie pole wektorowe X na rozmaitości różniczkowej M można utożsamiać z operatorem różniczkowym $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ który jest różniczkowaniem, tzn. spełnia wzór Leibniza $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

Lewe (prawe) przesunięcie L_g (R_g) funkcji na grupie Liego G definiujemy wzorem

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1}x),$$

$$(R_g f)(x) = f(xg).$$

Można sprawdzić że $L_{g_1}(L_{g_2}f) = L_{g_1g_2}f$ i $R_{g_1}(R_{g_2}f) = R_{g_1g_2}f$.

Mówimy że pole wektorowe X jest niezmiennicze na lewe przesunięcia jeśli

$$X(L_g f) = L_g(Xf)$$

Odpowiednio X jest niezmiennicze na prawe przesunięcia jeśli

$$X(R_g f) = R_g(Xf).$$

Definicja. Algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G to zbiór prawostronnie niezmienniczych pól wektorowych na G . Algebra Liego $\mathfrak{g}$ ma strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$, mianowicie dodawanie pól wektorowych i mnożenie przez liczbę zachowuje pola prawostronnie niezmiennicze.

Prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe jest jednoznacznie wyznaczone przez swoją wartość w jednym punkcie, np. jedynie e . A więc algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Na algebrze Liego grupy Liego G wprowadzamy dodatkową operację, tzn. nawias Liego wzorem

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Widać że jest to pole prawostronnie niezmiennicze, czyli nawias Liego jest dobrze zdefiniowany.

Nawias Liego jest $\mathbb{R}$ -liniowy, antysymetryczny

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

i spełnia tożsamość Jacobiego

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Ogólniej jeśli R jest pierścieniem przemiennym, A jest modulem nad R zaopatrzone w R -liniową operację $[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$ (nawias Liego) to mówimy że A jest algebrą Liego nad R jeśli $[x, x] = 0$ (to jest dobra definicja antysymetrii w ogólnym przypadku) i nawias Liego spełnia tożsamość Jacobiego.

Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G możemy wyznaczać wyznaczając najpierw prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe na G wzorem:

$$(Xf)(g) = \partial_t f(\gamma(t)g)|_{t=0}$$

gdzie γ jest dowolnie wybraną krzywą gładką z wektorem stycznym dla $t = 0$ równym $X(e)$. Wzór ten można uzasadnić następująco: jasne jest że wzór da prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe. Dobierając γ możemy dostać dowolne $X(e)$, czyli w ten sposób dostaniemy wszystkie prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe na G .

W praktyce możemy się ograniczyć do krzywych takich że ich wektory styczne dają bazę przestrzeni stycznej w e .

Przykład. Dla przykładowej grupy nr 3, tzn. $\mathbb{R}^2$ z mnożeniem zadany wzorem

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(x_2)y_1 + y_2).$$

bierzemy $\gamma_1(t) = (t, 0)$ i $\gamma_2(t) = (0, t)$. Mamy

$$(Xf)(g) = \partial_t f(\gamma_1(t)(x, y))|_{t=0} = \partial_t f(t + x, y)|_{t=0} = \partial_x f(x, y).$$

$$(Yf)(g) = \partial_t f(\gamma_2(t)(x, y))|_{t=0} = \partial_t f(x, \exp(x)t + y)|_{t=0} = \exp(x)\partial_y f(x, y).$$

By wyznaczyć nawias Liego wystarczy policzyć $[X, Y]$, bo zawsze $[Y, X] = -[X, Y]$, $[X, X] = [Y, Y] = 0$. Mamy

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= XYf - YXf = X(\exp(x)\partial_y f) - Y(\partial_x f) \\ &= \partial_x(\exp(x)\partial_y f) - \exp(x)\partial_y(\partial_x f) \\ &= \exp(x)\partial_x\partial_y f + \exp(x)\partial_y f - \exp(x)\partial_y\partial_x f \\ &= \exp(x)\partial_y f = Yf. \end{aligned}$$

Homomorfizm algebr Liego nad R definiujemy jako odwzorowanie h które jest R -liniowe i przeprowadza nawias Liego na nawias Liego

$$h([x, y]) = [h(x), h(y)].$$

Lemat 0.1 *Jeśli h jest gładkim homomorfizmem grupy Liego G w grupę Liego H , to pochodna h w jedyńce grupy G daje homomorfizm algebr Liego.*

Uwaga: Tu korzystamy z tego wektor styczny w jedyńce jednoznacznie wyznacza prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe.

Dowód: Oczywiście pochodna daje odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe. A więc wystarczy pokazać że pochodna przeprowadza nawias Liego na nawias Liego. Niech X, Y będą prawostronnie niezmienniczymi polami wektorowymi na G zaś $\tilde{X}, \tilde{Y}$ ich obrazami przez pochodną h . Jako że h jest homomorfizmem, to X jest h -związane z $\tilde{X}$, tzn.

$$\tilde{X}(h(g)) = (Dh)_g X(g)$$

gdzie $(Dh)_g$ oznacza pochodną h w g . Podobnie Y i $\tilde{Y}$ są h -związane. Niech $f \in C^\infty(H)$ będzie dowolne. Jako że pola są h -związane to mamy

$$X(f \circ h) = (\tilde{X}f) \circ h$$

i podobnie dla Y . Teraz

$$\begin{aligned} [X, Y](f \circ h) &= (XY - YX)(f \circ h) \\ &= ((\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X})f) \circ h = ([\tilde{X}, \tilde{Y}]f) \circ h \end{aligned}$$

co oznacza że wartość $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ w jedyńce H jest obrazem $[X, Y]$ przez pochodną h . $\square$

Definicja: Podgrupą jednoparametrową grupy Liego G nazywamy gładki homomorfizm z $\mathbb{R}$ w G . Z definicji podgrupa jednoparametrowa h spełnia

$$h(t_1)h(t_2) = h(t_1 + t_2)$$

Pole wektorowe X_h definiujemy wzorem

$$(X_h f)(x) = \partial_t f(h(t)x)|_{t=0}.$$

Z tego wzoru widać że pole X_h jest prawostronnie niezmiennicze.

Lemat 0.2 Dla każdego X z algebry Liego grupy Liego G istnieje dokładnie jedna podgrupa jednoparametrowa h_X taka że $X_{h_X} = X$. Odwzorowanie $(X, t) \mapsto h_X(t)$ jest gładkie.

Dowód: Z wzoru wyżej wynika że

$$\partial_t h(t) = X_h(h(t)).$$

To jest równanie różniczkowe zwyczajne z gładkimi współczynnikami. Na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych h jest wyznaczone jednoznacznie. Z twierdzenia o istnieniu rozwiązań równanie wyżej ma rozwiązanie, co najmniej dla dostatecznie małych t , tzn. istnieje $\varepsilon > 0$ takie że równanie ma rozwiązanie dla $|t| < \varepsilon$. Teraz wystarczy zauważyć że jeśli równanie ma rozwiązanie dla $t \in [-T, T]$, to wzór

$$h_1(t) = h(t - T)h(T)$$

zadaje rozwiązanie równania dla $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ (używamy tu prawostronną niezmienniczość X). Mamy też $h_1(T) = h(T)$, czyli jest to przedłużenie rozwiązania na przedział $[-T, T + \varepsilon/2]$. Podobnie można rozumować dla $t = -T$, przedłużając rozwiązanie na $[-T - \varepsilon/2, T + \varepsilon/2]$. Teraz indukcyjnie pokazujemy że rozwiązanie istnieje to dowolnych $t \in \mathbb{R}$. Przy okazji rozumowanie wyżej pokazuje że

$$h(t_1 + t_2) = h(t_1)h(t_2)$$

czyli że rozwiązanie h jest podgrupą jednoparametrową.

Gładkość odwzorowania $(X, t) \mapsto h_X(t)$ wynika z twierdzenia o gładkiej zależności rozwiązań równań różniczkowych od parametrów. $\square$

Przykład: Przypominam że grupa Heisenberga to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Łatwo sprawdzić że proste euklidesowe, tzn. h postaci

$$h(t) = (at, bt, ct)$$

są podgrupami jednoparametrowymi w grupie Heisenberga. Mianowicie, człon $x_1 y_2 - x_2 y_1 = at_1 bt_2 - at_2 bt_1 = 0$, czyli $h(t_1)h(t_2) = h(t_1 + t_2)$. Z lematu wynika że są to wszystkie podgrupy jednoparametrowe grupy Heisenberga.

Przykład: Macierzowa funkcja wykładnicza

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

daje podgrupy jednoparametrowe w grupie macierzy. Dokładniej, podgrupa h_M jest zadana wzorem

$$h_M(t) = \exp(tM).$$

Tak jak dla klasycznej funkcji wykładniczej mamy $h_M(t_1 + t_2) = h_M(t_1)h_M(t_2)$, czyli faktycznie jest to podgrupa jednoparametrowa. Pochodna $\exp$ w jedyne

(macierzy identycznościowej) to identyczność, czyli w ten sposób dostaniemy wszystkie podgrupy jednoparametrowe w grupie macierzy.

Definicja: Odwzorowanie eksponencjalne z algebry Liego w grupę Liego definiujemy jako $\exp(X) = h_X(1)$, tzn. wartość dla $t = 1$ podgrupy z wektorem stycznym X .

Uwaga: $h_X(t) = \exp(tX)$. Mianowicie, $h_{sX}(t) = h_X(st)$ jako że przy ustalonym s obie strony są podgrupami jednoparametrowymi z tym samym wektorem stycznym w 0. Teraz

$$h_X(t) = h_{tX}(1) = \exp(tX).$$

Oczywiście $\exp$ jest odwzorowaniem gładkim. Mamy

$$\partial_t \exp(tX)|_{t=0} = \partial_t h_{tX}(1)|_{t=0} = \partial_t h_X(t)|_{t=0} = X$$

czyli pochodna $\exp$ w zerze to identyczność. Na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej oznacza to że $\exp$ jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $0 \in \mathfrak{g}$ z pewnym otoczeniem jedynek w G .

Jeśli h jest homomorfizmem z G w H , zaś Dh to pochodna h w jedynce, to mamy wzór

$$h(\exp(X)) = \exp(Dh(X)).$$

Mianowicie, podstawiając tX zamiast X widzimy że obie strony dają podgrupy jednoparametrowe z tym samym wektorem stycznym.

Lemat 0.3 *Jeśli G jest spójną grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$, to*

- G jest generowana przez obrazy podgrup jednoparametrowych,
- G jest generowana przez obraz dowolnego otoczenia 0 przez $\exp$.

Dowód. Obraz $\exp$ jest zawarty w sumie obrazów podgrup jednoparametrowych, więc drugi punkt jest mocniejszy. Jako że $\exp$ jest lokalnym dyfeomorfizmem w 0, to obraz dowolnego otoczenia 0 przez $\exp$ zawiera pewne otoczenie e w G . A więc wystarczy pokazać że jeśli U jest otoczeniem e w G to U generuje G . Niech

$$V = \{g \in U : g^{-1} \in U\} = U \cap U^{-1}.$$

Jako że branie elementu odwrotnego jest ciągle V jest otoczeniem e , $V^{-1} = V$ i $V \subset U$. Dalej pokażemy że V generuje G . Niech

$$S = \sum_{k>0} V^k.$$

Mamy

$$S \cdot S = \left(\sum_{k>0} V^k\right) \left(\sum_{l>0} V^l\right) = \sum_{k \geq 2} V^k = \sum_{k>0} V^k = S,$$

gdzie przedostatnia równość zachodzi bo $e \in V$ i $V \subset V^2$. Mamy też

$$S^{-1} = \sum_{k>0} (V^k)^{-1} = \sum_{k>0} (V^{-1})^k = \sum_{k>0} V^k = S$$

czyli S jest zamknięte na mnożenie i branie elementu odwrotnego, czyli S jest podgrupą G . Jako suma zbiorów otwartych S jest podgrupą otwartą. Jako że G

jest spójna oznacza to że $S = G$. Mianowicie, ogólnie G jest sumą warstw xS , $x \in G$ względem S . Dwie warstwy albo są rozłączne albo równe. Gdyby była więcej niż jedna warstwa dałoby to rozkład G na sumę rozłącznych zbiorów otwartych co jest niemożliwe bo G jest spójna.

Lemat 0.4 *Jeśli G jest spójną grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$, H jest grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{h}$, ϕ i ψ są gładkimi homomorfizmami z G w H takimi że $D\phi_e = D\psi_e$, to $\phi = \psi$.*

Komentarz: Mniej formalnie, homomorfizm spójnych grup Liego jest jednoznacznie wyznaczony przez homomorfizm algebr Liego.

Dowód: Dla $v \in \mathfrak{g}$ piszemy

$$\phi(\exp(v)) = \exp(D\phi_e v) = \exp(D\psi_e v) = \psi(\exp(v))$$

gdzie pierwsza i trzecia równość zachodzi bo podgrupa jednoparametrowa jest jednoznacznie wyznaczona przez swoją pochodną w 0. Czyli równość zachodzi na obrazie $\exp$. Jako że ϕ i ψ są homomorfizmami to równość zachodzi na podgrupie generowanej przez $\exp$. Ale G jest spójna, a więc na mocy Lematu 0.3 podgrupa generowana przez obraz $\exp$ to całe G , czyli równość zachodzi na całym G . $\square$