

Definicja Podgrupę H grupy Liego G nazywamy podgrupą Liego jeśli H ma strukturę grupy Liego i włożenie identycznościowe H w G jest gładkie.

Uwaga: Ta definicja dopuszcza różne dziwne zachowania.

Przykłady:

1. Zbiór punktów postaci $\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ jest izomorficzny z prostą rzeczywistą i jest podgrupą Liego płaszczyzny.
2. Niech G_d to będzie G z topologią dyskretną i strukturą rozmierności wymiaru 0. Wtedy G_d jest podgrupą Liego G .
3. $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ jest podgrupą Liego $\mathbb{R}^2$.
4. Niech a będzie liczbą niewymierną. Niech $H = \{(t, at) : t \in \mathbb{R}\}$. H jest podgrupą Liego $\mathbb{R}^2$. Niech $G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Obraz H przez odwzorowanie ilorazowe jest gęstą podgrupą Liego w G .
5. Niech $G = SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ będzie produktem półprostym $SL(2, \mathbb{Z})$ z $\mathbb{R}^2$ gdzie działanie $SL(2, \mathbb{Z})$ na $\mathbb{R}^2$ jest naturalne. Jako rozmierność G jest dyfeomorficzna z produktem kartezjańskim $SL(2, \mathbb{Z})$ i $\mathbb{R}^2$. Na G wprowadzamy teraz topologię i strukturę różniczkową produktu $SL(2, \mathbb{Z})$ i $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$. To daje nam podrozmaitość G (w sensie włożenia) która jako zbiór jest identyczna z G , czyli jest podgrupą. Ale łatwo sprawdzić że przy tej nowej topologii działania grupowe są nieciągłe, czyli nie jest to podgrupa Liego.

Lemat 0.1 *Jeśli N jest podrozmaitością (w sensie włożenia) rozmierności M , H jest rozmiernością, f jest funkcją ciągłą z H w N taką że $\iota \circ f$ jest gładkie, gdzie ι oznacza włożenie N w M , to f jest gładka.*

Dowód: To jest wniosek z twierdzenia o rzędzie. Niech $x \in H$, $y = f(x) \in N$. Naturalne włożenie ι z N w M ma stały rząd, więc na mocy twierdzenia o rzędzie ustnieją otwarte $U \subset N$ i $V \subset M$, $U \subset V$, $y \in U$ takie że w odpowiednim układzie współrzędnych włożenie ι kopiuje współrzędne z U pozostałe pozycje uzupełniając zerami. Jako że f jest ciągła to istnieje otwarte $W \subset H$, $x \in W$, $f(W) \subset U$. Teraz widać że f obcięte do W jest gładkie (bo na W $\iota \circ f$ różni się od f tylko dodatkowymi zerowymi składowymi). Jako że x był dowolny oznacza to że f jest gładkie. $\square$

Lemat 0.2 *Jeśli H jest podgrupą i podrozmaitością G i operacje grupowe są ciągłe w topologii H , to H jest podgrupą Liego.*

Dowód: Niech ι oznacza włożenie identycznościowe H w G , m oznacza mnożenie w H zaś $\tilde{m}$ mnożenie w G . Mamy

$$\iota \circ m = \tilde{m} \circ (\iota \times \iota)$$

Jako że ι i $\tilde{m}$ są gładkie to prawa strona jest gładka. Czyli $\iota \circ m$ jest gładkie. Z założenia m jest ciągłe, więc na mocy lematu 0.1 jest gładkie. Podobnie pokazujemy że branie elementu odwrotnego jest gładkie. A więc H ma strukturę grupy Liego. Jako że ι jest gładkie to H jest podgrupą Liego. $\square$

Definicja. Automorfizm wewnętrzny A_x , odwzorowanie Ad i ad to

$$A_x(y) = x^{-1}yx,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_x &= D_y A_x(y)|_{y=e}, \\ \mathrm{ad}_X &= (D_x \mathrm{Ad}_x)|_{x=e}(X).\end{aligned}$$

Lemat 0.3 *Mamy*

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_X(Y) &= [X, Y], \\ \mathrm{Ad}_{\exp(X)} &= \exp(\mathrm{ad}_X), \\ A_{\exp(X)}(\exp(Y)) &= \exp(\exp(\mathrm{ad}_X)Y).\end{aligned}$$

Dowód: Wprowadzamy pomocnicze operatory E_X wzorem

$$(E_X f)(g) = f(\exp(X)g).$$

Mamy

$$\partial_t E_{tX}|_{t=0} = X.$$

Rozpisując definicje

$$\begin{aligned}f(A_{\exp(X)}(\exp(Y))g) &= f(\exp(-X)\exp(Y)\exp(X)g) = \\ (E_{-X}f)(\exp(Y)\exp(X)g) &= (E_Y E_{-X}f)(\exp(X)g) = \\ (E_X E_Y E_{-X}f)(g).\end{aligned}$$

Czyli

$$(\mathrm{Ad}_X(Y))f = \partial_s E_X E_{sY} E_{-X} f|_{s=0} = E_X Y E_{-X} f,$$

$$\mathrm{ad}_X(Y)f = \partial_t \mathrm{Ad}_{tX}(Y)f|_{t=0} = \partial_t E_{tX} Y E_{-tX} f|_{t=0} = XYf - YXf = [X, Y]f.$$

To daje pierwszy wzór. $\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$ i $\exp(\mathrm{ad}_{tX})$ to podgrupy jednoparametrowe w grupie endomorfizmów $\mathfrak{g}$ z tym samym wektorem stycznym ad_X dla $t = 0$, czyli są równe co daje środkowy wzór. Wreszcie $A_{\exp(X)}(\exp(tY))$ i $\exp(\exp(\mathrm{ad}_X)tY)$ to podgrupy jednoparametrowe G z tym samym wektorem stycznym $\exp(\mathrm{ad}_X)Y$ dla $t = 0$, co daje trzeci wzór. $\square$

Definicja. Powiemy że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest przemienna gdy nawias Liego jest tożsamościowo równy 0, tzn.

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} [X, Y] = 0.$$

Definicja. Powiemy że podalgebra $\mathfrak{h}$ algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest ideałem wtedy i tylko wtedy gdy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Uwaga: Na mocy lematu z wykładu 1 algebra Liego podgrupy Liego H jest podalgebrą algebry Liego G .

Lemat 0.4 *Spójna grupa Liego jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy jej algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest przemienna.*

Dowód: Na mocy lematu mamy

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = A_{\exp(X)}(\exp(Y)) = \exp(\exp(\mathrm{ad}_X)Y)$$

Jeśli $\mathfrak{g}$ jest przemienna to $\mathrm{ad}_X = 0$, czyli $\exp(\mathrm{ad}_X)Y = Y$, czyli

$$A_{\exp(X)}(\exp(Y)) = \exp(Y).$$

Na mocy Lematu 3 z wykładu 2 grupa G jest generowana przez obraz $\exp$, czyli dla każdego $g \in G$ mamy

$$A_{\exp(X)}g = g,$$

czyli $g \exp(X) = \exp(X)g$. Przy ustalonym $g \in G$ zbiór elementów $h \in G$ komutujących z g jest podgrupą i na mocy wzoru wyżej zawiera obraz $\exp$. Ale obraz $\exp$ generuje G , czyli każdy element $h \in G$ komutuje z g , czyli G jest przemienna.

Jeśli grupa jest przemienna to prowadząc rozumowanie w przeciwną stronę widzimy że

$$A_{\exp(X)} \exp(Y) = \exp(Y),$$

czyli różniczkując

$$Ad_{\exp(X)}Y = Y,$$

co oznacza że

$$\text{ad}_X(Y) = \partial_t \text{Ad}(\text{ad}_t X)Y = 0$$

czyli

$$0 = \text{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

czyli algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest przemienna. $\square$

Lemat 0.5 *Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ zaś H jej podgrupą Liego z podalgebrą $\mathfrak{h}$. Jeśli G i H są spójne zaś $\mathfrak{h}$ jest ideałem $\mathfrak{g}$ to H jest podgrupą normalną. Jeśli H jest podgrupą normalną i automorfizmy wewnętrzne G są ciągłe na H w topologii H to $\mathfrak{h}$ jest ideałem $\mathfrak{g}$.*

Dowód: Jak w poprzednim lemacie używamy wzór

$$\exp(-X) \exp(Y) \exp(X) = A_{\exp(X)}(\exp(Y)) = \exp(\exp(\text{ad}_X)Y)$$

Jeśli $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ to dla $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ mamy $\text{ad}_X(Y) \in \mathfrak{h}$, czyli

$$\exp(\text{ad}_X)Y \in \mathfrak{h}$$

czyli

$$\exp(\exp(\text{ad}_X)Y) \in H$$

i

$$\exp(-X) \exp(Y) \exp(X) \in H.$$

Jako że obraz $\exp$ generuje H dla $h \in H$ mamy

$$\exp(-X)h \exp(X) \in H$$

czyli równość

$$g^{-1}hg \in H$$

zachodzi na obrazie $\exp$ in G . Ale obraz $\exp$ generuje G czyli równość wyżej zachodzi na całym G , czyli H jest podgrupą normalną.

Jeśli H jest normalną podgrupą G , to $A_{\exp(X)}$ daje automorfizm H . Z założenia jest on ciągły, czyli gładki. A więc pochodna $A_{\exp(X)}$ w jedynce odwzorowuje $\mathfrak{h}$ w $\mathfrak{h}$. Czyli

$$\text{Ad}_{\exp(tX)}\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}.$$

Różniczkując względem t widzimy że dla $Y \in \mathfrak{h}$

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \partial_t \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y)|_{t=0} \in \mathfrak{h}.$$

Czyli dla $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$

$$[X, Y] \in \mathfrak{h}$$

co oznacza że $\mathfrak{h}$ jest ideałem. □

Komentarz: Powyżej założenie że automorfizmy wewnętrzne są ciągłe jest automatycznie spełnione dla spójnego H . Mianowicie, wtedy H jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych, czyli jest podzbiorem borelowskim G . To powoduje że struktura borelowska H jest dziedziczona z G , czyli automorfizmy wewnętrzne obcięte do H są borelowsko mierzalne. Dla homomorfizmu grup polskich (a spójne H jest grupą polską), borelowska mierzalność implikuje ciągłość. Jednakże to rozumowanie używa dość zaawansowany materiał którego nie omawiamy na tym wykładzie. Ponadto, dla niespójnych H założenie może być istotne.

Przykład. Niech $G = SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ będzie produktem półprostym (z naturalnych działaniem $SL(2, \mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^2$) i niech $H = \mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ gdzie jak poprzednio $\mathbb{R}_d$ oznacza $\mathbb{R}$ z topologią dyskretną. Wtedy H jest podgrupą Liego G i dzielnikiem normalnym, ale działanie $SL(2, \mathbb{R})$ na H jest nieciągłe i algebra Liego H *nie* jest ideałem w algebrze Liego G .