

**Lemat 0.1** Niech  $G$  będzie grupą Liego z algebrą Liego  $\mathfrak{g}$ . Istnieje otoczenie  $0 \in U \subset \mathfrak{g}$  takie że  $\exp$  jest różnowartościowy na  $U$  i dla  $V = \exp(U)$  zachodzą warunki

- $V$  jest otwarty
- jeśli  $g \in V$ ,  $g = \exp(X)$ ,  $X \in U$  i istnieje  $h \in V$  takie że  $g = h^2$  to  $h = \exp(X/2)$ .

*Dowód:* Niech  $Y$  będzie otoczeniem  $0$  w  $\mathfrak{g}$  takim że  $\exp$  jest dyfeomorfizmem  $Y$  na otwarte  $W = \exp(Y)$ . Niech  $U$  będzie otoczeniem  $0$  w  $\mathfrak{g}$  takim że  $U + U \subset Y$ . Jako że  $U$  jest otwarty,  $U \subset Y$  i  $\exp$  jest dyfeomorfizmem na  $Y$  to  $V = \exp(U)$  jest otwartym podzbiorem  $W$ . Skoro  $W$  jest otwarty w  $G$  to również  $V$  jest otwarty w  $G$ . Niech  $g \in V$ ,  $g = \exp(X)$ . Jeśli  $h \in V$ , to istnieje  $Z \in U$  takie że  $h = \exp(Z)$ . Jeśli  $g = h^2$  to  $g = \exp(2Z)$ .  $2Z \in U + U \subset Y$  i  $\exp$  jest różnowartościowy na  $Y$ , a więc  $2Z = X$ , czyli  $Z = X/2$ .  $\square$

**Lemat 0.2** Niech  $G$  będzie grupą Liego z algebrą Liego  $\mathfrak{g}$ . Jeśli  $h$  jest ciągłą podgrupą jednoparametrową o wartościach w  $G$  to istnieje  $X \in \mathfrak{g}$  taki że  $h(t) = \exp(tX)$ . W szczególności  $h$  jest gładka.

*Dowód:* Niech  $U$  i  $V$  będą jak w lemacie 0.1. Jako że  $h$  jest ciągła to istnieje  $s > 0$  takie że  $h([-s, s]) \subset V$ . Niech  $Y \in U$  będzie takie że  $h(s) = \exp(Y)$ . Indukcyjnie pokazujemy że dla naturalnych  $k$  mamy  $h(2^{-k}s) = \exp(2^{-k}Y)$ . Mianowicie, z określenia  $Y$  zachodzi to dla  $k = 0$ . Jeśli równość zachodzi dla pewnego  $k$  to bierzemy  $g = h(2^{-k}s) = \exp(2^{-k}Y)$  i  $w = h(2^{-(k+1)}s)$ . Mamy  $w \in V$ ,  $w^2 = g$ , więc na mocy lematy 0.1 mamy  $w = \exp(2^{-(k+1)}Y)$ , co daje wynik dla  $k + 1$  i kończy dowód indukcyjny. Niech  $X = Y/s$  i niech  $u$  będzie podgrupą jednoparametrową zadaną wzorem  $u(t) = \exp(tX)$ . Dla  $t$  postaci  $m2^{-k}s$  z całkowitym  $m$  i naturalnym  $k$  mamy

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(tX) = \exp(m2^{-k}sY/s) = \exp(m2^{-k}Y) = \exp(2^{-k}Y)^m \\ &= h(2^{-k}s)^m = h(m2^{-k}s) = h(t) \end{aligned}$$

czyli  $u$  i  $h$  są równe dla takich  $t$ . Ale  $t$  tej postaci tworzą zbiór gęsty, zaś  $u$  i  $h$  są ciągłe, więc równość zachodzi dla dowolnych  $t$ .  $\square$

**Lemat 0.3** Ciągły homomorfizm  $h$  grupy Liego  $G$  w grupę Liego  $H$  jest gładki.

*Dowód:* Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie bazą algebry Liego  $\mathfrak{g}$  grupy  $G$ . Wtedy  $\gamma_i(t) = h(\exp(tX_i))$  zadaje ciągłą podgrupę jednoparametrową w  $H$ . Na mocy poprzedniego lematu  $\gamma_i$  jest gładka. Rozważmy odwzorowanie  $\phi$  z  $\mathbb{R}^n$  w  $G$  zadane wzorem

$$\phi((t_1, \dots, t_n)) = \exp(t_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_n X_n).$$

Pochodna  $\phi$  w  $0$  jest odwracalna (bo  $X_i$  są bazą), więc  $\phi$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia  $0 \in \mathbb{R}^n$  na otoczenie jedynek  $U$  w  $G$ .  $h$  jest homomorfizmem, więc

$$h(\exp(t_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_n X_n)) = \gamma_1(t_1) \cdot \dots \cdot \gamma_n(t_n).$$

Jako że  $\gamma_i$  jest gładka, prawa strona jest gładka. A więc na  $U$  homomorfizm  $h$  jest gładki, czyli ze względu na grupową niezmienniczość struktur różniczkowych na  $G$  i  $H$  homomorfizm  $h$  jest gładki w otoczeniu dowolnego punktu, czyli gładki wszędzie.  $\square$

**Lemat 0.4** *Jeśli  $G$  jest grupą Liego,  $x, y \in \mathfrak{g}$ , gdzie  $\mathfrak{g}$  jest algebrą Liego grupy  $G$  to*

$$\exp(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(x/n) \exp(y/n))^n$$

*Dowód:* Używając  $\exp^{-1}$  jako mapę w otoczeniu jedynki z definicji  $\exp$  mamy

$$\exp^{-1}(\exp(x/n)) = x/n$$

dla  $x$  z pewnego otoczenia  $e$ .

Jako że mnożenie jest gładkie oraz  $xe = ex = x$  to pochodna cząstkowa mnożenia względem pierwszego (lub drugiego) argumentu jest identycznością. A więc z wzoru Taylora

$$\exp^{-1}(\exp(x/n) \exp(y/n)) = x/n + y/n + o(1/n)$$

czyli

$$n \exp^{-1}(\exp(x/n) \exp(y/n)) \rightarrow x + y$$

co dzięki ciągłości  $\exp$  daje wynik.  $\square$

**Lemat 0.5** *Domknięta podgrupa  $H$  grupy Liego  $G$  jest podgrupą Liego*

*Dowód:* Niech  $V$  będzie zbiorem takich  $x \in \mathfrak{g}$  że  $\exp(\mathbb{R}x) \subset H$ . Na mocy poprzedniego lematu  $V$  jest podprzestrznią. Niech  $W$  będzie podprzestrznią dopełniczą do  $V$  w  $\mathfrak{g}$ . Wtedy  $(w, v) \mapsto \exp(w) \exp(v)$  jest dyfeomorfizmem produktowego otoczenia  $0$  w  $W \times V$  z otoczeniem jedynki  $U$  w  $G$ .

Twierdzimy że  $\exp(V) \cap U$  jest otoczeniem  $e$  w  $H$ . Mianowicie w przeciwnym razie istniałby ciąg  $h_n \in H$  zbieżny do  $e$  taki że  $h_n \notin \exp(V) \cap U$ .  $h_n = w_n v_n$  gdzie  $v_n \in \exp(V) \cap U$  i  $w_n \in \exp(W) \cap U$ . Oczywiście  $w_n = \exp(u_n) \in H$  i  $u_n$  dąży do  $0$ . Piszemy  $u_n = t_n z_n$  gdzie  $t_n = |u_n|$ , zaś  $|z_n| = 1$ . Z ciągu  $z_n$  można wybrać podciąg zbieżny  $z_{n_k}$ . Niech  $z = \lim z_{n_k}$ . Mamy  $z_{n_k} \in W$ , więc również  $z \in W$ . Niech  $s \in \mathbb{R}$ . Piszemy  $s = m_k t_{n_k} + r_k$  z  $m \in \mathbb{Z}$  i  $|r_k| \leq t_{n_k}$ . Jako że  $u_n \rightarrow 0$ , to  $t_n \rightarrow 0$ , czyli  $s - m_k t_{n_k} \rightarrow 0$  czyli  $m_k t_{n_k} \rightarrow s$ . A więc

$$\exp(sz) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(m_k t_{n_k} z_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(u_{n_k})^{m_k} \in H,$$

co przeczy maksymalności  $V$ . To oznacza że jeśli zadamy  $l_x$  wzorem  $l_x(v) = \exp(v)x$  to  $l_x$  jest homeomorfizmem na otoczenie  $Ux \cap H$  w  $H$ . Teraz niech  $\phi_x$  będzie odwrotnością  $l_x$ . Łatwo sprawdzić że  $\phi_x$  są zgodne. Mianowicie, jeśli dziedzina  $\phi_e$  i dziedzina  $\phi_x$  się przecinają, to przekrój dziedzin  $F \subset U$ . Na  $E = \phi_e(F)$  mamy  $\phi_x \phi_e^{-1} = \exp^{-1} x^{-1} \exp$  co jest gładkie. Ogólny przypadek przez przesunięcia sprowadza się do powyższego. A więc  $H$  (z topologią indukowaną) jest podrozmaitością, a więc również podgrupą Liego.  $\square$

**Lemat 0.6** (twierdzenie Frobeniusa) Niech  $M$  będzie rozmaitością gładką zaś  $A$  rodziną gładkich pól wektorowych na  $M$  taką że  $A$  jest zamknięta na dodawanie i mnożenie przez funkcje gładkie (czyli jest modułem nad  $C^\infty(M)$ ) i  $A$  jest zamknięta na komutator pól wektorowych (czyli jest algebrą Liego). Dla  $x \in M$  niech  $A_x$  oznacza podprzetrzeń  $TM_x$  rozpinaną przez wartości pól z  $A$  w punkcie  $x$ . Zakładamy że wymiar  $A_x$  nie zależy od  $x$ . Ustalmy  $y \in M$ . Istnieje dokładnie jedna podrozmaitość  $N \subset M$  taka że  $N$  jest spójna,  $y \in N$ , dla każdego  $x \in N$  mamy  $TN_x = A_x$  i  $M$  jest maksymalna między rozmaitościami spełniającymi trzy poprzednie warunki.

**Lemat 0.7** Niech  $G$  będzie grupą Liego z algebrą Liego  $\mathfrak{g}$  i niech  $\mathfrak{h}$  będzie podalgebrą Liego  $\mathfrak{g}$ . Wtedy istnieje jednoznaczna spójna podgrupa Liego  $H$  której algebrą Liego jest  $\mathfrak{h}$ .

*Dowód:* Niech  $B$  będzie modułem nad  $C^\infty(G)$  rozpinanym przez  $\mathfrak{h}$ . Ze wzoru

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$$

wynika że  $B$  jest zamknięte na komutator i  $\dim(B_x) = \dim(\mathfrak{h})$ . Ponadto  $B_x = \text{lin}\{X_i(x)\}$  jeśli  $\{X_i\}$  są bazą  $\mathfrak{h}$ . A więc spełnione są założenia twierdzenia Frobeniusa, czyli istnieje dokładnie jedna maksymalna spójna podrozmaitość  $H$  taka że  $e \in H$ ,  $TH_x = B_x$  dla  $x \in H$ . Dla  $x \in H$  rozważmy teraz  $Hx$ . Jako że pola z  $\mathfrak{h}$  są prawostronnie niezmiennicze mamy  $T(Hx)_z = B_z$  dla  $z \in Hx$ . Ponadto  $x \in Hx$  i  $Hx$  jest spójna. Jako prawe przesunięcie  $H$   $Hx$  jest maksymalna z tymi własnościami. Ale  $H$  ma też te własności, czyli  $H \subset Hx$ . teraz widzimy że  $e \in Hx$ , z maksymalności  $H$  mamy  $Hx \subset H$ , czyli  $Hx = H$ . A więc  $H$  jest zamknięte na mnożenie. Jako że pola z  $\mathfrak{h}$  są styczne do  $H$  to  $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$ . Ponadto  $\exp$  jest dyfeomorfizmem na otoczenie jedynek w  $H$ . Jako że  $\exp(-X)$  jest odwrotnością  $\exp(X)$  oznacza to że elementy pewnego otoczenia  $U$  jedynek w  $H$  są odwracalne. Teraz widać że

$$\bigcup_k U^k$$

jest otwartą podgrupą  $H$  i jako że  $H$  jest spójne musi być równe  $H$ . Czyli  $H$  jest podgrupą  $G$ . Aby pokazać że operacje grupowe w  $H$  są ciągłe zauważmy najpierw że automorfizmy wewnętrzne  $H$  są ciągłe w jedynce. Dokładniej, jeśli  $x$  jest ustalonym elementem  $H$  to definiujemy

$$A_x(y) = xyx^{-1}.$$

Niech  $U$  będzie otoczeniem  $e$  w  $H$ . Istnieje otoczenie zera  $V \subset \mathfrak{h}$  takie że  $\exp(V) \subset U$ . Dalej istnieje otoczenie zera  $W$  w  $\mathfrak{g}$  takie że  $W \cap \mathfrak{h} \subset V$  i  $\exp$  jest dyfeomorfizmem  $W$  na otoczenie jedynek  $X$  w  $G$ . Jako że operacje grupowe w  $G$  są ciągłe to  $A_x$  jako odwzorowanie z  $G$  w  $G$  jest ciągłe. A więc istnieje otoczenie  $Y$  zera w  $\mathfrak{g}$  takie że  $\exp^{-1}(A_x(\exp(Y))) \subset W$ . Niech  $Z = Y \cap V$ . Jako że  $A_x$  przekształca podgrupy jednoparametrowe na podgrupy jednoparametrowe, to  $A_x(\exp(\mathfrak{h})) \subset \exp(\mathfrak{h})$ , czyli  $A_x(\exp(Z)) \subset \exp(\mathfrak{h})$ . Razem z własnościami  $Y$  daje to  $A_x(\exp(Z)) \subset \exp(\mathfrak{h}) \cap \exp(W)$ . Jako że  $\exp$  jest różnowartościowe na  $W$  mamy  $A_x(\exp(Z)) \subset \exp(W \cap \mathfrak{h})$ . Lecz  $W \cap \mathfrak{h} \subset V$ , czyli

$$A_x(\exp(Z)) \subset \exp(V) \subset U.$$

$\exp(Z)$  jest otoczeniem jedynek w  $H$  zaś  $U$  było dowolnym otoczeniem jedynek w  $H$ , więc  $A_x$  jest ciągle w jedynce  $H$ . Podobnie, lecz łatwiej pokazujemy że mnożenie i branie elementu odwrotnego jest ciągle w jedynce  $H$ . Teraz niech  $x, y \in H$  będą dowolne. Z konstrukcji  $H$  struktura różniczkowa i topologia  $H$  jest niezmiennicza na prawe przesunięcia. Czyli dowolne otoczenie  $xy$  można zapisać w postaci  $Uxy$  gdzie  $U$  jest otoczeniem jedynek w  $H$ . Z pokazanej ciągłości w jedynce istnieją otoczenia jedynek  $V$  i  $W$  w  $H$  takie że  $VW \subset U$ . Teraz piszemy

$$VWxy = Vx(x^{-1}Wx)y$$

Z ciągłości automorfizmów wewnętrznych w jedynce  $H$  istnieje otoczenie jedynek  $X$  takie że  $X \subset x^{-1}Wx$ . A więc

$$VxXy \subset Vx(x^{-1}Wx)y = VWxy \subset Uxy.$$

Czyli dla dowolnego otoczenia  $xy$  (które zapisaliśmy jako  $Uxy$ ), znaleźliśmy otoczenie  $Vx$  elementu  $x$  i otoczenie  $Xy$  elementu  $y$  takie że

$$VxXy \subset Uxy.$$

Ale to jest ciągłość mnożenia w  $xy$ . Podobnie pokazujemy ciągłość odwrotności. Skoro operacje grupowe w  $H$  są ciągłe to  $H$  jest podgrupą Liego.  $\square$

**Definicja.** Niech  $P$  będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy że para  $(\pi, Q)$  jest nakryciem  $P$  jeśli  $\pi : Q \rightarrow P$  jest ciągle i dla każdego  $x \in P$  istnieje otoczenie  $U$  takie że  $\pi^{-1}(U)$  jest sumą rozłącznych zbiorów otwartych  $V_y$  i dla każdego  $y$   $\pi$  obcięte do  $V_y$  jest homeomorfizmem  $V_y$  z  $U$ .  $\pi$  powyżej nazywamy odwzorowaniem nakrywającym.

**Definicja.** Niech  $P$  i  $Q$  będą przestrzeniami topologicznymi, zaś  $A$  domkniętym podzbiorem  $P$ . Powiemy że funkcje ciągłe  $f$  i  $g$  z  $P$  w  $Q$  takie że  $f|_A = g|_A$  są homotopijne względem  $A$  jeśli istnieje funkcja ciągła  $h$  z  $P \times [0, 1]$  w  $Q$  taka że  $f(x) = h(x, 0)$ ,  $g(x) = h(x, 1)$  i  $f(x) = g(x) = h(x, t)$  dla  $x \in A$ .

Uwaga: Homotopia względem ustalonego  $A$  jest relacją równoważności.

**Definicja.** Grupą podstawową  $\pi_1(P, x_0)$  przestrzeni topologicznej  $P$  względem punktu  $x_0 \in P$  nazywamy zbiór klas równoważności krzywych ciągłych  $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$  takich że  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$  względem homotopii względem  $\{0, 1\}$ . Na klasach równoważności krzywych wprowadzamy mnożenie wzorem  $[\gamma_1][\gamma_2] = [\eta]$  gdzie  $\eta(t) = \gamma_1(2t)$  dla  $t \in [0, 1/2]$  i  $\eta(t) = \gamma_2(2t-1)$  dla  $t \in [1/2, 1]$ . Element neutralny to klasa krzywej stałej  $\gamma(t) = x_0$ , element odwrotny to klasa krzywej  $\eta$  z odwrotną parametryzacją:  $\eta(t) = \gamma(1-t)$ .

Jeśli  $P$  jest łukowo spójna to  $\pi_1(P, x_0)$  dla różnych  $x_0$  są izomorficzne. W takiej sytuacji często pisze się  $\pi_1(P)$  i używa nazwy grupa podstawowa.

eśli  $P$  jest łukowo spójna to  $\pi_1(P, x_0)$  dla różnych  $x_0$  są izomorficzne. W takiej sytuacji często pisze się  $\pi_1(P)$  i używa nazwy grupa podstawowa.

**Definicja.** Mówimy że łukowo spójna przestrzeń topologiczna  $P$  jest jedno-spójna jeśli jej grupa podstawowa jest trywialna. Równoważnie,  $P$  jest jedno-spójna wtedy i tylko wtedy gdy każda pętla w  $P$  (tzn. krzywa  $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$  taka że  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ) jest homotopijna ze stałą.

Można pokazać następujący lemat:

**Lemat 0.8** *Jeśli  $P$  jest przestrzenią z wyróżnionym punktem  $e$  i ciągłą operacją  $m : P \times P \rightarrow P$  taką że  $m(e, x) = m(x, e) = x$ , to grupa podstawowa  $P$  jest przemienna. W szczególności grupa podstawowa łukowo spójnej grupy topologicznej jest przemienna.*

**Definicja.** Powiemy że przestrzeń  $P$  jest póllokalnie jednospójna jeśli dla każdego punktu  $x \in P$  istnieje otoczenie  $V$  takie że każda krzywa  $\gamma$  taka że  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$  której obraz jest zawarty w  $V$  jest homotopijna względem  $\{0, 1\}$  z krzywą stałą.

**Lemat 0.9** *Jeśli  $P$  jest lokalnie łukowo spójna, spójna i póllokalnie jednospójna to  $P$  ma nakrycie jednospójne. W szczególności spójna rozmaitość ma nakrycie jednospójne.*

**Lemat 0.10** *Jeśli  $P$  jest lokalnie łukowo spójna, spójna i jednospójna,  $x_0 \in P$ ,  $f$  jest ciągłym odwzorowaniem z  $P$  w  $Q$ ,  $\pi : R \rightarrow Q$  jest nakryciem zaś  $\pi(y_0) = f(x_0)$  to istnieje dokładnie jedno ciągłe  $h$  takie że  $\pi \circ h = f$  i  $h(x_0) = y_0$ .*

Uwaga: odwzorowanie  $h$  z lematu nazywamy podniesieniem odwzorowania  $f$ .

Uwaga: lemat oznacza że nakrycie jednospójne przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej o ile istnieje to jest jednoznacznie wyznaczone z dokładnością do homeomorfizmu.

**Lemat 0.11** *Produkt kartezjański przestrzeni jednospójnych jest jednospójny. Produkt kartezjański nakryć jest nakryciem.*

**Lemat 0.12** *Nakrycie  $\pi : P \rightarrow Q$  rozmaitości gładkiej (analitycznej)  $Q$  ma naturalną strukturę rozmaitości gładkiej (analitycznej) taką że dla dowolnej rozmaitości gładkiej (analitycznej)  $M$  ciągłe  $f : M \rightarrow P$  jest gładkie (analityczne) wtedy i tylko wtedy gdy  $\pi \circ f$  jest gładkie (analityczne).*

**Lemat 0.13** *Jeśli  $G$  jest spójną i łukowo spójną grupą topologiczną zaś  $\pi : H \rightarrow G$  jest nakryciem jednospójnym  $G$ , to  $H$  ma jedyną strukturę grupy topologicznej taką że odwzorowanie nakrywające  $\pi$  jest homomorfizmem grup. Jądro  $\pi$  jest izomorficzne z grupą podstawową  $G$ .*

*Dowód:* Niech  $m : G \times G \rightarrow G$  oznacza mnożenie w  $G$ .  $P \times P$  jest jednospójne zaś  $\pi \times \pi$  jest odwzorowaniem nakrywającym z  $P \times P$  w  $G \times G$ . Mnożenie  $\tilde{m}$  w  $P$  istnieje i jest jednoznaczne na mocy Lematu 0.10 jako podniesienie odwzorowania  $f = m \circ (\pi \times \pi)$ . Łączność  $\tilde{m}$  również wynika z Lematu 0.10. Mianowicie,  $\tilde{m}(x, \tilde{m}(y, z))$  i  $\tilde{m}(\tilde{m}(x, y), z)$  dają dwa podniesienia tego samego odwzorowania  $m(x, m(y, z)) \circ (\pi \times \pi \times \pi)$ , więc z jednoznaczności podnoszenia są równe. Podobnie pokazujemy istnienie elementu odwrotnego.  $\square$

**Lemat 0.14** *Nakrycie jednospójne  $H$  spójnej grupy Liego  $G$  jest grupą Liego.*

*Dowód.* Na mocy poprzedniego lematu  $H$  ma naturalną strukturę grupy topologicznej. Na mocy Lematu 0.12  $H$  ma strukturę rozmaitości i operacje grupowe są gładkie.  $\square$

**Lemat 0.15** *Zakładamy że grupa Liego  $G$  z algebrą Liego  $\mathfrak{g}$  jest spójna i jednospójna. Jeśli  $f$  jest homomorfizmem algebr Liego z  $\mathfrak{g}$  w algebrę Liego  $\mathfrak{h}$  grupy Liego  $H$  to istnieje dokładnie jeden gładki homomorfizm  $F$  z  $G$  w  $H$  taki że  $DF(x)|_{x=e} = f$ .*

*Dowód:* Niech  $S = G \times H$ .  $S$  jest grupą Liego z algebrą Liego  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ . Niech

$$\mathfrak{p} = \{(x, f(x)) : x \in \mathfrak{g}\}.$$

Jako że  $f$  jest homomorfizmem algebr Liego to  $\mathfrak{p}$  jest podalgebrą w  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ . Na mocy Lematu 0.7 istnieje podgrupa Liego  $P \subset S$  z algebrą Liego  $\mathfrak{p}$ . Rozważmy rzutowanie  $\pi_1$  z  $P$  na  $G$ . Pochodna  $\pi_1$  w jedyńce jest różnowartościowa, więc  $\pi_1$  jest lokalnym dyfeomorfizmem. Jako że  $\pi_1$  jest homomorfizmem wynika stąd że obraz  $\pi_1$  jest otwarty. Jako że  $G$  jest spójna wynika stąd że  $\pi_1$  jest na. Jako że  $\pi_1$  jest lokalnym dyfeomorfizmem to jądro  $\pi_1$  jest dyskretne. Wynika stąd że  $\pi_1$  jest nakryciem. Jako że  $G$  jest jednospójna, identyczność na  $G$  można podnieść do ciągłego odwzorowania z  $G$  w  $P$ , czyli  $\pi_1$  jest izomorfizmem grup topologicznych, czyli  $\pi_1$  ma gładką odwrotność  $\pi_1^{-1}$ . Niech  $\pi_2$  oznacza rzutowanie z  $P$  na  $H$ . Bierzemy

$$F = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}.$$

Jest to gładki homomorfizm grup Liego. Widać że  $D\pi_1^{-1}(y)|_{y=e}$  spełnia

$$D\pi_1^{-1}(y)|_{y=e}(x) = (x, f(x))$$

czyli  $DF(y)|_{y=e} = f$

□