

0.1 Wspólny wektor zerowy

Lemat 0.1 (twierdzenie Engela) *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego nilpotentnych endomorfizmów nietrywialnej skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej V , to istnieje niezerowy $v \in V$ taki że dla każdego $x \in \mathfrak{g}$ mamy $xv = 0$.*

Dowód: Indukcja ze względu na wymiar $\mathfrak{g}$. Niech $\mathfrak{m}$ będzie maksymalną podalgebrą w $\mathfrak{g}$ taką że $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{g}$. Zauważmy że jeśli x jest nilpotentnym endomorfizmem to ad_x jest nilpotentny:

$$\text{ad}_x(y) = xy - yx = (L_x - R_x)(y)$$

gdzie $L_x(y) = xy$ i $R_x(y) = yx$. L_x i R_x komutują, więc

$$\text{ad}_x^n = (L_x - R_x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} L_x^{n-i} (-R_x)^i.$$

Jeśli $x^k = 0$ i $n = 2k$ to co najmniej jedno z i i $n - i$ jest większe lub równe k . Jeśli $i \geq k$ to $(-R_x)^i = 0$, jeśli $n - i \geq k$ to $L_x^{n-i} = 0$. Czyli każdy człon sumy wyżej jest zerem i $\text{ad}_x^n = 0$. Rozważmy teraz działanie $\mathfrak{m}$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$. Jak pokazaliśmy $\mathfrak{m}$ działa przez endomorfizmy nilpotentne, więc istnieje $x \in \mathfrak{g}$ taki że $[y, x] \in \mathfrak{m}$ dla $y \in \mathfrak{m}$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie podprzestrzenią $\mathfrak{g}$ rozpinaną przez x i $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą, więc z maksymalności $\mathfrak{m}$ mamy $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Czyli $\mathfrak{m}$ jest ideałem kowymiaru 1 z elementem dopełniczym x .

Niech W będzie podprzestrzenią V składającą się z takich $v \in V$ że dla każdego $y \in \mathfrak{m}$ mamy

$$yv = 0.$$

Na mocy założenia indukcyjnego W jest nietrywialna. Jeśli $v \in W$ to $xv \in W$. Mianowicie

$$yxv = xyv + [y, x]v = 0$$

bo $yv = 0$ i $[y, x] \in \mathfrak{m}$ czyli również $[y, x]v = 0$. Jako że x jest endomorfizmem nilpotentnym, to istnieje $v \in W$, $v \neq 0$, taki że $xv = 0$. $\square$

Lemat 0.2 *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego nilpotentnych endomorfizmów nietrywialnej skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej V , to można wybrać bazę V tak że w tej bazie elementy $\mathfrak{g}$ mają postać górnortrójkątną z zerami na diagonalach.*

Dowód: Indukcja używając Lemat 0.1. $\square$

Lemat 0.3 *Skończenie wymiarowa algebra Liego $\mathfrak{g}$ nad ciałem jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in \mathfrak{g}$ endomorfizm ad_x jest nilpotentny.*

Dowód. Z definicji algebra jest nilpotentna jeśli istnieje k takie że

$$[x_1, [x_2, \dots, x_{k+1}]] = 0$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathfrak{g}$. Oznacza to że

$$\text{ad}_{x_1} \text{ad}_{x_2} \dots \text{ad}_{x_k} = 0$$

czyli w szczególności $\text{ad}_x^k = 0$ dla dowolnego $x \in \mathfrak{g}$. Innymi słowy ad_x jest nilpotentny.

Niech $\mathbf{h}$ oznacza obraz $\mathfrak{g}$ przez ad . Jeśli ad_x jest nilpotentny dla dowolnego $x \in \mathfrak{g}$ to $\mathbf{h}$ składa się z endomorfizmów nilpotentnych, a więc na mocy Lematu 0.2 elementy $\mathbf{h}$ można zapisać w postaci górnotrójkątnej z zerami na diagonalu. Taka algebra jest nilpotentna. $\mathbf{h}$ jest izomorficzna z ilorazem $\mathfrak{g}$ przez centrum, a więc również $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna. $\square$

0.2 Moduły proste i uogólnienie twierdzenia Liego

Jeśli A jest algebrą Liego nad pierścieniem R zaś M jest modulem nad R to mówimy że M jest modulem Liego nad A jeśli zadane jest działanie A na M które jest dwuliniowe i spełnia

$$xyv - yxv = [x, y]v$$

dla dowolnych $x, y \in A$ i $v \in M$. W literaturze używa się też terminu reprezentacja algebry A .

W naturalny sposób definiujemy homomorfizmy, podmoduły, sumę prostą, produkt i iloraz modułów Liego.

Jak się okaże później moduły Liego nad A można utożsamiać z modułami nad odpowiednim pierścieniem (uniwersalną algebrą obwiednią $U(A)$)

Lemat 0.4 *Niech $\mathfrak{g}$ będzie skończenie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem R charakterystyki 0. Wtedy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest algebrą nilpotentną.*

Dowód: Najpierw rozważmy przypadek algebraicznie domkniętego R . Bierzemy teraz działanie $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$ za pomocą ad . Dokładniej rozpatrujemy homomorfizm ϕ zadany wzorem $\phi(x) = \text{ad}_x$. Obraz $\mathfrak{g}$ przez ϕ to rozwiązalna algebra $\mathbf{m}$ endomorfizmów $\mathfrak{g}$. Na mocy twierdzenia Liego elementy $\mathbf{m}$ można zapisać w postaci macierzy górnotrójkątnych. Elementy $[\mathbf{m}, \mathbf{m}]$ są więc macierzami górnotrójkątnymi z zerami na diagonalu i widać że dają algebrę nilpotentną. Oczywiście obraz $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ przez ϕ jest zawarty w $[\mathbf{m}, \mathbf{m}]$, a więc jest algebrą nilpotentną. Jądro ϕ to takie x że $\text{ad}_x = 0$, czyli dla każdego $y \in \mathfrak{g}$ mamy $[x, y] = 0$, czyli x należy do centrum $\mathfrak{g}$. A więc jądro ϕ jest zawarte w centrum $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Łatwo sprawdzić że jeśli iloraz algebry przez ideał zawarty w centrum jest nilpotentny to sama algebra też jest nilpotentna. Czyli dla algebraicznie domkniętego R algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna.

Ogólnie $\mathfrak{g}$ można rozszerzyć do algebry Liego $\bar{\mathfrak{g}}$ nad algebraicznym domknięciem $\bar{R}$ ciała R . Później podamy ogólną konstrukcję, ale tu wystarczy wprowadzić bazę w $\mathfrak{g}$ i wyrazić komutator elementów bazy jako kombinację liniową elementów bazy. Zmieniając współczynniki z R na $\bar{R}$ dostaniemy rozwiązalną algebrę Liego. Na mocy już udowodnionej części $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]$ jest nilpotentny. Ale ideały z ciągu w definicji nilpotentności dla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ są zawarte w odpowiednich elementach ciągu dla $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]$, czyli ciąg dla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ się urywa, czyli $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna. $\square$

Lemat 0.5 Niech $\mathfrak{g}$ będzie skończenie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem R charakterystyki 0. Wtedy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ składa się z elementów nilpotentnych.

Dowód: Podobny do poprzedniego lematu. $\square$

Lemat 0.6 Niech $\mathfrak{g}$ będzie rozwiązalną algebrą Liego endomorfizmów nietrywialnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem R charakterystyki 0. Jeśli V jest modulem prostym nad $\mathfrak{g}$ to $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]V = 0$.

Dowód: Na mocy poprzedniego lematu $\mathfrak{m} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ składa się z elementów nilpotentnych, a więc na mocy twierdzenia Engela ma wspólny wektor zerowy v . Niech $W = \{w \in V : \mathfrak{m}w = 0\}$. W jest niezmiennicze dla $\mathfrak{g}$. Mianowicie dla $w \in W$, $m \in \mathfrak{m}$ i $x \in \mathfrak{g}$ mamy

$$mxw = xmw + [m, x]w = 0$$

bo $mw = 0$ i $[m, x] \in \mathfrak{m}$. A więc $xw \in W$ czyli w faktycznie jest niezmiennicze dla $\mathfrak{g}$. Czyli W jest nietrywialnym podmodulem Liego w V , a więc skoro V jest prosty to $W = V$, czyli $\mathfrak{m}V = 0$. $\square$

Lematy 0.5 i 0.6 faktycznie stanowią alternatywne sformułowanie twierdzenia Liego. Można podać bezpośredni dowód Lematu 0.6 i użyć go do dowodu twierdzenia Liego: w naszym dowodzie twierdzenia Liego główny wysiłek szedł na udowodnienie specjalnego przypadku Lematu 0.6 i mając Lemat 0.6 można by dowód znacznie uprościć.

0.3 Rozkład spektralny endomorfizmu i algebry nilpotentnej

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem, zaś $A : V \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym. Definiujemy

$$V_\lambda = \{v \in V : \exists_k (A - \lambda I)^k v = 0\}$$

Uwaga: Powyżej można by napisać $(A - \lambda I)^{\dim(V)} v = 0$. Mamy też $(A - \lambda I)^{\dim(V_\lambda)} v = 0$.

Lemat 0.7 Jeśli V i A są jak wyżej to V_λ jest zachowywana przez A . Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte to

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

Lemat 0.8 Jeśli V i A są jak wyżej, $B : V \rightarrow V$ jest odwzorowaniem liniowym takim że $\text{ad}_A(B)^l = 0$ dla pewnego $l > 0$ to B zachowuje V_λ .

Dowód: Indukcja ze względu na l . Jeśli $l = 1$ to oznacza że A i B komutują, czyli

$$(A - \lambda I)^k Bv = B(A - \lambda I)^k v = 0$$

dla $v \in V_\lambda$ i $k = \dim(V_\lambda)$, czyli B zachowuje V_λ .

W kroku indukcyjnym zakładamy że wynik jest prawdziwy dla l i rozpatrujemy B takie że $\text{ad}_A(B)^{l+1} = 0$. Mamy wzór

$$[(A - \lambda I)^k, B] = \sum_{j=0}^{k-1} (A - \lambda I)^{k-j-1} [A - \lambda I, B] (A - \lambda I)^j$$

Zauważmy że $C = [A - \lambda I, B] = [A, B] = \text{ad}_A(B)$, czyli

$$\text{ad}_A(C)^l = \text{ad}_A(B)^{l+1} = 0.$$

A więc z założenia indukcyjnego $CV_\lambda \subset V_\lambda$, czyli dla $v \in V_\lambda$ mamy

$$[A - \lambda I, B](A - \lambda I)^j v \in V_\lambda.$$

Teraz niech $k = 2 \dim(V_\lambda) + 1$. Wtedy we wzorze wyżej albo $j \geq \dim(V_\lambda)$ albo $k - j - 1 \geq \dim(V_\lambda)$. Jeśli $j \geq \dim(V_\lambda)$ to

$$(A - \lambda I)^j v = 0.$$

Jeśli $k - j - 1 \geq \dim(V_\lambda)$ to

$$(A - \lambda I)^{k-j-1} [A - \lambda I, B] (A - \lambda I)^j v = 0.$$

To oznacza że wszystkie człony sumy dającej $[(A - \lambda I)^k, B]v$ są zerami, czyli

$$[(A - \lambda I)^k, B]v = 0$$

czyli

$$(A - \lambda I)^k Bv = B(A - \lambda I)^k v + [(A - \lambda I)^k, B]v = 0$$

dla $v \in V_\lambda$, co oznacza że B zachowuje V_λ . □

Teraz uogólniamy definicję wyżej. Niech N będzie podprzestrzenią przestrzeni endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem zaś λ będzie funkcją na N . Definiujemy

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall A \in N \exists k (A - \lambda(A))^k v = 0\}.$$

Uwaga: Jak dla pojedynczego endomorfizmu można brać $k = \dim(V)$, czy też $k = \dim(V_\lambda)$.

Jeśli V_λ jest nietrywialne to mówimy że λ jest funkcjonałem pierwiastkowym dla N (czasami wygodnie jest dopuścić przypadek trywialny i traktować dowolny funkcjonał jako funkcjonał pierwiastkowy).

Lemat 0.9 *Niech N będzie nilpotentną algebrą Liego endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym. Wtedy*

$$V = \oplus_\lambda V_\lambda.$$

Ponadto jeśli ciało jest charakterystyki 0 to λ są funkcjonałami liniowymi i można wybrać bazy w V_λ tak by elementy $A \in N$ obcięte do V_λ miały postać górnorójkątną z $\lambda(A)$ na diagonalu.

Dowód: Rozpatrzmy najpierw przypadek gdy N zawiera element A z co najmniej dwoma różnymi wartościami własnymi. A więc

$$V = \oplus_{\eta} V_{\eta}$$

gdzie η przebiega wartości własne A . Jako że N jest nilpotentna, to dla każdego $B \in N$ mamy $\text{ad}_A(B)^l = 0$, a więc na mocy Lematu 0.8 elementy N zachowują rozkład wyżej. Czyli redukujemy problem do przypadku gdy wszystkie elementy $A \in N$ mają dokładnie jedną wartość własną $\lambda(A)$ (wartość własna istnieje, bo ciało jest algebraicznie domknięte). To kończy dowód w przypadku dowolnej charakterystyki.

Jeśli ciało jest charakterystyki 0 to

$$\text{Tr}(A) = \dim(V)\lambda(A).$$

co oznacza że $\lambda(A)$ jest funkcjonałem liniowym na N .

Ponadto, wtedy $A - \lambda(A)$ ma jedną wartość własną równą 0 i

$$V = V_{\lambda}.$$

N jako algebra nilpotentna jest rozwiązalna, a więc dla ciała charakterystyki 0 na mocy twierdzenia Liego można wybrać bazę w V_{λ} tak by elementy N miały postać górnątrójkątną. Oczywiście w takiej bazie $A \in N$ ma $\lambda(A)$ na diagonalu. $\square$

Uwaga: w powyższym lemacie zamiast algebraicznej domkniętości wystarczy zakładać że elementy A (lub tylko bazy A) mają wszystkie wartości własne w ciele podstawowym.

Uwaga: przykład z zadania pokazuje że w charakterystyce p może nie istnieć wspólny wektor własny. W tym przykładzie λ jest liniowe, ale ogólnie $\lambda(A)$ może zależeć nieliniowo od A .