1 Wprowadzenie

Uwaga: ten dokument używa pakietu `amsmath`.

2 Główne wyniki

Lemat 2.1 *Jeśli* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *ma w punkcie* x_0 *macierz pochodnej*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zaś $v = (2, 1, 1)$ *to pochodna kierunkowa* F *w* x_0 *w kierunku wektora* v *to* $(3, 10)$.

Dowód: Pochodna kierunkowa w kierunku wektora v dana jest wzorem DFv gdzie DF jest macierzą pochodnej F w x_0. A więc wynik otrzymamy mnożąc macierz i wektor. □

Twierdzenie 2.2 *Miara zewnętrzna jest przeliczalnie podaddytywna:*

$$\mu^*(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji miary zewnętrznej dla każdego i istnieje przeliczalna rodzina odcinków S_i taka że $A_i \subset \bigcup_{R \in S_i} R$ i

$$\sum_{R \in S_i} |R| \leqslant \mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon. \tag{1}$$

Wtedy biorąc $S = \bigcup_i S_i$ mamy

$$\begin{aligned}
\bigcup_i A_i \subset \bigcup_i \bigcup_{R \in S_i} R &= \bigcup_{R \in S} R, \\
\sum_{R \in S} |R| &= \sum_i \sum_{R \in S_i} |R| && \text{z definicji } S \\
&\leqslant \sum_i (\mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon) && \text{na mocy 1} \\
&= 2\varepsilon + \sum_i \mu^*(A_i) && \text{sumując szereg geometryczny}
\end{aligned}$$

Jako że $\varepsilon > 0$ był dowolny daje to wynik. □

Wspomnijmy przydatne fakty:

- $\int_{\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$,
- jeśli A_i są mierzalne i $A_i \nearrow A$ to $\mu(A) = \lim \mu(A_i)$,
- funkcja $x \mapsto \exp(x)$ jest wypukła.