§ 2. Adele, idele, dywizory

2.1. Określenie pierścienia adeli i grupy ideli. W niniejszym paragrafie wprowadzimy dużą ilość nowych pojęć, które ułatwią badanie rodzin norm spełniających wzór iloczynowy. Będziemy więc stale zakładali, że Φ jest prawie skończoną rodziną norm określonych w ciele K spełniającą wzór iloczynowy.

Niech K_φ będzie uzupełnieniem ciała K względem normy $\varphi \in \Phi$. Element $(a_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\varphi \in \Phi} K_\varphi$ spełniający warunek:

$$\text{Istnieje tylko skończona liczba norm } \varphi \in \Phi \text{ takich, że } \varphi(a_\varphi) > 1,$$

nazywamy *adelem*[1] *ciała* K. Będziemy go zapisywali krócej jako (a_φ), jeżeli skądinąd wiadomo, jaką rodzinę norm Φ rozważamy. Element $a_\varphi \in K_\varphi$ nazywamy *współrzędną adela* (a_φ) *odpowiadającą normie* φ.

---

(1) *adèle* jest skrótem francuskich słów: *adjoint élément*.

Ponieważ do Φ należy tylko skończona liczba norm archimedesowych, więc zbiór wszystkich adeli ciała K jest pierścieniem ze względu na dodawanie i mnożenie odpowiednich współrzędnych. Nazywamy go *pierścieniem adeli ciała* K i oznaczamy przez A_K.

Niech $a \in K$. Ponieważ rodzina norm Φ jest prawie skończona, więc przyjmując $a_\varphi = a$ dla każdego $\varphi \in \Phi$ otrzymamy pewien adel (a_φ). Wszystkie jego współrzędne są równe. Taki adel nazywamy *głównym*. Adele główne ciała K tworzą podpierścień pierścienia A_K izomorficzny z K. W dalszym ciągu będziemy utożsamiali ciało K z pierścieniem adeli głównych ciała K identyfikując element $a \in K$ z adelem, którego wszystkie współrzędne są równe a.

Każdy element odwracalny pierścienia A_K nazywamy *idelem*(1) *ciała* K. Tak więc idelem jest każdy element $(a_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\varphi\in\Phi} K_\varphi^*$ spełniający warunek:

$$\text{Istnieje tylko skończona liczba norm } \varphi \in \Phi \text{ takich, że } \varphi(a_\varphi) \neq 1 .$$

Zbiór wszystkich ideli ciała K jest grupą ze względu na mnożenie odpowiednich współrzędnych. Nazywamy ją *grupą ideli ciała* K i oznaczamy przez J_K. Oczywiście każdy adel główny różny od zera jest idelem. Nazywamy go *idelem głównym*. Idele główne ciała K tworzą podgrupę grupy J_K izomorficzną z K^*. Grupę ideli głównych będziemy więc utożsamiali z grupą K^* Grupę ilorazową J_K/K^* nazywamy *grupą klas ideli ciała* K.

Niech $a = (a_\varphi) \in J_K$. Zbiór

$$T(a) = \{(b_\varphi) \in A_K : \varphi(b_\varphi) \leqslant \varphi(a_\varphi) \text{ dla każdego } \varphi \in \Phi\}$$

nazywamy *kostką wyznaczoną przez idel* a. Dokładniej mówiąc, kostka $T(a)$ jest wyznaczona nie tyle przez idel a, ile przez układ liczb rzeczywistych dodatnich $\varphi(a_\varphi)$, z których prawie wszystkie są równe 1, odpowiadających idelowi a.

Objętością kostki $T(a)$ (albo *objętością idela*) nazywamy liczbę $V(a) = \prod_{\varphi\in\Phi} \varphi(a_\varphi)$. Jest to liczba rzeczywista dodatnia. Ponieważ rodzina norm Φ spełnia wzór iloczynowy, więc dla każdego idela głównego a mamy $V(a) = 1$.

Jeżeli $a, b \in J_K$, to

$$V(ab) = \prod_{\varphi\in\Phi} \varphi(a_\varphi b_\varphi) = \prod_{\varphi\in\Phi} \varphi(a_\varphi) \prod_{\varphi\in\Phi} \varphi(b_\varphi) = V(a)\,V(b).$$

Zatem funkcja $V: J_K \to \boldsymbol{R}^*$ jest homomorfizmem grupy ideli ciała K w grupę multyplikatywną liczb rzeczywistych dodatnich. Jak zauważyliśmy wyżej, grupa ideli głównych jest zawarta w jądrze tego homomorfizmu. Jądro homomorfizmu V, które oznaczamy przez J_K^1, składa się z ideli o objętości 1. Idele takie nazywamy *jednostkowymi*. Mamy więc $K^* \subset J_K^1$.

(1) *idèle* jest skrótem francuskich słów *idéal élément*.

Zbiór adeli głównych należących do kostki $T(a)$ oznaczamy przez $L(a)$. Jeżeli w rodzinie norm Φ zastąpimy każdą normę przez normę równoważną tak, by nadal zachodził wzór iloczynowy, to liczba $V(a)$ na ogół ulegnie zmianie. Natomiast zbiory $T(a)$ i $L(a)$ pozostaną te same.

Zadania

1. Niech Φ będzie rodziną wszystkich norm kanonicznych określonych w ciele Q.
a) Czy każdy idel jednostkowy jest główny, tzn. czy $J_Q^1 = Q^*$?
b) Czy $(J_Q^1 : Q^*) < \infty$?

2. Znaleźć wszystkie adele główne ciała Q należące do kostki $T(1)$. Czy dla dowolnego $\alpha \in J_Q$ zbiór $L(a) = Q \cap T(a)$ jest skończony?

2.2. Dywizory, klasy dywizorów. Niech Φ będzie prawie skończoną rodziną norm określonych w ciele K spełniającą wzór iloczynowy i niech S będzie skończonym zbiorem norm należących do Φ. Niech $I_{K,S}$ będzie zbiorem tych elementów $(\alpha_\varphi)_{\varphi \notin S}$ iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\varphi \in \Phi \setminus S} \varphi(K_\varphi^*)$, które mają tylko skończoną liczbę współrzędnych α_φ różnych od jedynki. Elementy takie nazywamy *S-dywizorami ciała K*.

Oczywiście $I_{K,S}$ jest grupą ze względu na mnożenie odpowiednich współrzędnych. Odwzorowanie

$$\lambda_S : J_K \to I_{K,S}$$

określone wzorem $\lambda_S((a_\varphi)_{\varphi \in \Phi}) = (\varphi(a_\varphi))_{\varphi \in \Phi \setminus S}$ jest homomorfizmem przekształcającym grupę ideli na grupę S-dywizorów ciała K. Jeżeli S jest zbiorem wszystkich norm archimedesowych należących do Φ (w szczególności S jest zbiorem pustym, jeżeli do Φ nie należy żadna norma archimedesowa), to S-dywizory nazywamy po prostu *dywizorami*, a grupę $I_{K,S}$ oznaczamy przez I_K.

Ponieważ $K^* \subset J_K$, więc $\lambda_S(K^*) \subset J_{K,S}$. Elementy zbioru $\lambda_S(K^*)$ nazywamy *S-dywizorami głównymi* (w szczególności — *dywizorami głównymi*, jeżeli S jest zbiorem norm archimedesowych należących do Φ). Grupę S-dywizorów głównych (dywizorów głównych) oznaczamy przez $P_{K,S}$ (odpowiednio — przez P_K).

Grupę $\mathrm{Cl}_{K,S} = I_{K,S}/P_{K,S}$ nazywamy *grupą klas S-dywizorów* (w szczególności grupę $\mathrm{Cl}_K = I_K/P_K$ nazywamy *grupą klas dywizorów*). Jądro homomorfizmu $\lambda_S' : K^* \to P_{K,S}$ będącego ograniczeniem homomorfizmu λ_S nazywamy *grupą S-jedności ciała K* i oznaczamy przez $U_{K,S}$. W szczególności, gdy S jest zbiorem norm archimedesowych należących do Φ, to grupę tę nazywamy po prostu *grupą jedności ciała K* i oznaczamy przez U_K.

Mamy więc $U_{K,S} = \{a \in K^* : \varphi(a) = 1 \text{ dla każdej normy } \varphi \in \Phi \setminus S\}$. Z powyższych rozważań otrzymujemy następujący diagram przemienny, w którym wiersze i kolumny są dokładne [1]:

---

[1] Ciąg homomorfizmów nazywamy *dokładnym*, jeżeli obraz każdego homomorfizmu jest równy jądru homomorfizmu następnego.

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & U_{K,S} & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
1 & \to & K^* & \to & J_K & \xrightarrow{\mu} & J_K/K^* & \to & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_s'} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_s} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_s''} & & \\
1 & \to & P_{K,S} & \to & I_{K,S} & \xrightarrow[\mu'']{} & \mathrm{Cl}_{K,S} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

Ponieważ $K^* \subset J_K^1 \subset J_K$, więc z diagramu (1) otrzymujemy następujący diagram przemienny o dokładnych wierszach i kolumnach:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & U_{K,S} & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
1 & \to & K^* & \to & J_K^1 & \xrightarrow{\mu} & J_K^1/K^* & \to & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\lambda}_s'} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_s} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_s''} & & \\
1 & \to & P_{K,S} & \to & I_{K,S}^0 & \xrightarrow[\mu'']{} & \mathrm{Cl}_{K,S}^0 & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

gdzie $I_{K,S}^0 = \lambda_S(J_K^1)$ oraz $\mathrm{Cl}_{K,S}^0 = I_{K,S}^0/P_{K,S}$. Są to podgrupy grup $I_{K,S}$ i $\mathrm{Cl}_{K,S}$ odpowiednio. W pewnych przypadkach mamy $I_{K,S}^0 = I_{K,S}$ i wobec tego $\mathrm{Cl}_{K,S}^0 = \mathrm{Cl}_{K,S}$. Mówi o tym następujący

LEMAT 1. *Jeżeli zbiór S zawiera normę ψ spełniającą warunek:*

$$\psi(K_\psi^*) \supset \varphi(K_\varphi^*) \quad \textit{dla każdej normy} \quad \varphi \in \Phi \setminus S,$$

to $I_{K,S}^0 = I_{K,S}$.

Dowód. Niech $\alpha = (\alpha_\varphi)_{\varphi\notin S} \in I_{K,S}$. Wtedy dla każdej normy $\varphi \notin S$ istnieje taki element $a_\varphi \in K_\varphi^*$, że $\alpha_\varphi = \varphi(a_\varphi)$. Z założenia wynika więc, że $\alpha_\varphi \in \psi(K_\psi^*)$ dla $\varphi \notin S$, tzn. $\alpha_\varphi = \psi(c_\varphi)$, gdzie $c_\varphi \in K_\psi^*$. Przy tym, jeżeli $\alpha_\varphi = 1$, to przyjmujemy $c_\varphi = 1$. Określamy idel $b = (b_\varphi)_{\varphi\in\Phi} \in J_K$, jak następuje:

$$b_\varphi = \begin{cases} a_\varphi & \text{dla} \quad \varphi \notin S, \\ \prod\limits_{\varphi\notin S} c_\varphi^{-1} & \text{dla} \quad \varphi = \psi, \\ 1 & \text{dla} \quad \varphi \neq \psi,\ \varphi \in S. \end{cases}$$

Mamy

$$V(b) = \prod_{\varphi\in\Phi} \varphi(b_\varphi) = \prod_{\varphi\notin S} \varphi(a_\varphi)\cdot\psi\Big(\prod_{\varphi\notin S} c_\varphi^{-1}\Big) = \prod_{\varphi\notin S} \varphi(a_\varphi)\psi(c_\varphi)^{-1} = 1.$$

Zatem $b \in J_K^1$. Ponadto $\lambda_S(b) = \alpha$. ■