3.3. Lemat Goursata

Jak już poprzednio wspominaliśmy, funkcje holomorficzne różnią się zasadniczo swymi własnościami od funkcji różniczkowalnych rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, mimo formalnie identycznych definicji. Wyprowadzenie wielu ważnych własności funkcji holomorficznych jest bądź bardzo trudne, bądź też wręcz niemożliwe bez całkowania w dziedzinie zespolonej. Punktem wyjścia w dowodach tych własności jest tzw. *twierdzenie całkowe Cauchy'ego*, które mówi, że całka krzywoliniowa z funkcji f holomorficznej w obszarze D po krzywej zamkniętej leżącej w D i stosownie dobranej, jest równa zeru. Brak odpowiednika tego twierdzenia dla funkcji rzeczywistych pociąga za sobą specyficzną odmienność teorii funkcji analitycznych od teorii funkcji rzeczywistych różniczkowalnych.

Najprostszą wersją twierdzenia Cauchy'ego jest tzw. *lemat Goursata*, czyli twierdzenie Cauchy'ego dla trójkąta. Trójkątem o wierzchołkach z_1, z_2, z_3 nazywać będziemy zbiór

$$T = \{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 : m_1 + m_2 + m_3 = 1;\, m_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, 2, 3\}$$

Liczby m_i nazywamy *współrzędnymi barycentrycznymi* punktu $z_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3$; nazwa pochodzi stąd, że punkt z_0 jest środkiem ciężkości układu mas m_i umieszczonych w punktach z_i. Zakładamy, że trójkąt T jest *niezdegenerowany*, tzn. że punkty z_i, $i = 1, 2, 3$, nie leżą na jednej prostej. Przez ∂T oznaczymy zorientowaną krzywą Jordana będącą brzegiem T, tj. łamaną o wierzchołkach z_i zorientowaną dodatnio: pole wersorów stycznych $\mathfrak{s}$ na łamanej obieramy tak, że układ wersorów $(\mathfrak{s}, \mathfrak{n})$, gdzie $\mathfrak{n}$ jest normalną wewnętrzną, przejdzie po stosowym obrocie i przesunięciu w układ wersorów bazowych: $([0; 1], [0; j])$.

LEMAT 3.1 (GOURSATA DLA TRÓJKĄTA)

Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w obszarze D i jeżeli trójkąt T zawiera się w D, to

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0 \tag{3.7}$$

Dowód. Wprowadźmy następujące oznaczenie: dla trójkąta $T \subset D$ przyjmujemy

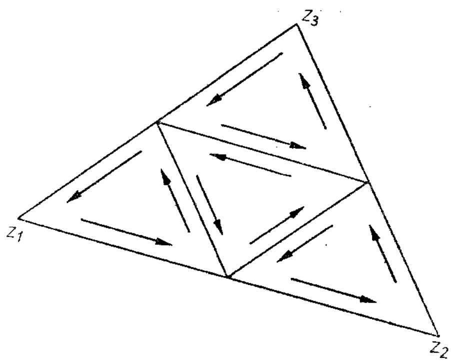
$$J(T) = \int_{\partial T} f(z)\, dz$$

Trójkąt dany T dzielimy na cztery trójkąty przystające $T^{(i)}$, powstałe przez przepołowienie boków trójkąta T (rys. 17). Zachodzi wówczas równość

$$J(T) = \sum_{n=1}^{4} J(T^{(i)})$$

a więc

$$|J(T)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} |J(T^{(i)})|$$



Rys. 17

Oznaczmy przez T_1 ten trójkąt $T^{(i)}$, dla którego całka $J(T^{(i)})$ ma największą wartość bezwzględną. Mamy więc $|J(T)| \leqslant 4\,|J(T_1)|$. W analogiczny sposób, dzieląc trójkąt T_1 na cztery trójkąty przystające, otrzymujemy trójkąt T_2; postępując tak dalej w analogiczny sposób otrzymujemy ciąg (T_n) trójkątów taki, że

$$T \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots \supset T_n \supset T_{n+1} \supset \ldots$$

oraz

$$|J(T)| \leqslant 4\,|J(T_1)| \leqslant 4^2 |J(T_2)| \leqslant \ldots \leqslant 4^n |J(T_n)| \leqslant \ldots$$

Jak wiadomo z elementów topologii [3.3], ciąg malejący zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej zupełnej, o średnicach dążących do zera, ma dokładnie jeden punkt wspólny; jest to tw. Cantora o iloczynie ciągu malejącego (zstępującego) zbiorów. Zatem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{z_0\} \subset T$$

Niech teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $f'(z_0)$ istnieje, więc możemy tak dobrać $\delta > 0$, że

$$f(z) = f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)$$

gdzie $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$ w kole $K(z_0;\delta)$.

Obierzmy następnie $n \in \mathsf{N}$ tak duże, że $T_n \subset K(z_0;\delta)$.

Wówczas

$$J(T_n) = \int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int_{\partial T_n} [f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)]\,dz =$$

$$= \int_{\partial T_n} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz$$

gdyż całka z funkcji liniowej $z \mapsto A+Bz$ po krzywej zamkniętej ∂T_n znika na mocy tw. 3.1; por. także ćw. 6. Niech teraz $L_n = l(\partial T_n)$, $D_n = \operatorname{dia} T_n$ oraz $L = l(\partial T)$, $D = \operatorname{dia} T$, gdzie $\operatorname{dia} T = \sup\{|z_i - z_k| : z_i, z_k \in T\}$. Mamy $L_n = 2^{-n}L$, $D_n = 2^{-n}D$, a więc

$$|J(T_n)| \leqslant \max_{z\in T_n} |\varepsilon(z)|\,|z-z_0|\,l(\partial T_n) < \varepsilon D_n L_n = 4^{-n}DL\varepsilon$$

Stąd $|J(T)| \leqslant 4^n |J(T_n)| < DL\varepsilon$, a więc $J(T) = 0$ wobec dowolności ε. *QED*

Z lematu Goursata dla trójkąta wynika natychmiast lemat Goursata dla prostokąta: *jeżeli f jest funkcją homolorficzną w obszarze D i jeżeli prostokąt $R = [a;b]\times[c;d] \subset D$, to*

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0 \tag{3.8}$$

Dla dowodu wystarczy podzielić prostokąt R przekątną na dwa trójkąty T_1, T_2 i zauważyć, że

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial T_1} f(z)\,dz + \int_{\partial T_2} f(z)\,dz = 0$$

Lemat Goursata dla prostokąta można uogólnić, zakładając istnienie w obszarze D skończonej ilości punktów wyjątkowych a_k takich, że

$$\lim_{z\to a_k} (z-a_k) f(z) = 0 \tag{3.9}$$

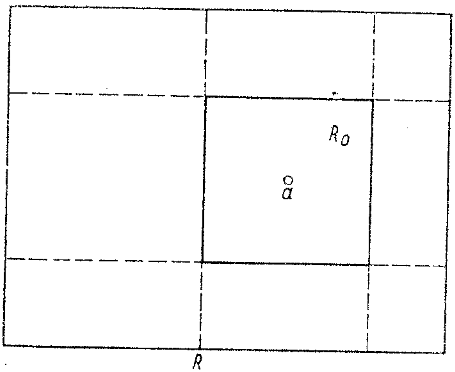
podczas gdy w punktach a_k funkcja f nie jest określona. Mamy bowiem

LEMAT 3.2. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze $D\setminus\{a_1, \ldots, a_n\}$ i jeżeli równość* (3.9) *zachodzi dla $k = 1, \ldots, n$, to dla każdego prostokąta $R \subset D$ o bokach równoległych do osi układu i nie zawierających żadnego z punktów a_k mamy równość* (3.8).

Dowód. Wystarczy rozważać jeden punkt wyjątkowy a, bo R można zawsze podzielić na mniejsze prostokąty, z których każdy zawiera co najwyżej jeden punkt a_k wewnątrz. Niech R_0 będzie kwadratem o środku a i boku tak małym, że

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-a|} \quad \text{dla} \qquad z \in \operatorname{fr} R_0$$

Mamy więc (por. rys. 18)



Rys. 18

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial R_0} f(z)\, dz \right| < \varepsilon \max_{z \in \operatorname{fr} R_0} |z-a|^{-1} l(\partial R_0) < 8\varepsilon$$

i z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$. *QED*