A. Jak już wspominaliśmy w podrozdziale 1.3 — wzór (1-19) — jednostronne przekształcenie Laplace'a jest określone zależnością

$$\bar{f}(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{3-1}$$

która funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje jej $\mathscr{L}$-transformatę $\bar{f}(s)$, będącą funkcją zmiennej zespolonej $s = x + jy$; zmienna s odgrywa przy całkowaniu rolę parametru.

Całkę występującą we wzorze (3-1) będziemy nazywać *całką Laplace'a* funkcji $f(t)$.

Wzór (3-1) określa transformatę danej funkcji $f(t)$ tylko wtedy, gdy istnieją takie wartości parametru s, dla których całka Laplace'a funkcji $f(t)$ istnieje lub — inaczej — gdy istnieje taki niepusty zbiór wartości s, dla których całka Laplace'a

jest zbieżna. W przeciwnym razie całka Laplace'a jest dla każdej wartości s rozbieżna i funkcja $f(t)$ nie posiada $\mathscr{L}$-transformaty.

Omówimy teraz niektóre zagadnienia dotyczące zbieżności bezwzględnej całki Laplace'a.

TWIERDZENIE 3-1. *Jeśli całka Laplace'a funkcji $f(t)$ jest zbieżna bezwzględnie w punkcie $s_0 = x_0 + jy_0$, to jest ona zbieżna bezwzględnie we wszystkich punktach $s = x + jy$ takich, że* $\operatorname{Re} s = x \geqslant x_0$.

Dowód. Dla $x > x_0$ mamy

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-xt}|f(t)| = e^{-(x-x_0)t} \cdot e^{-x_0t}|f(t)| \leqslant e^{-x_0t}|f(t)| \tag{3-4}$$

Ponieważ całka

$$\int_0^\infty |e^{-s_0t}f(t)|\,dt = \int_0^\infty e^{-x_0t}|f(t)|\,dt$$

z założenia istnieje, więc istnieje także dla $x \geqslant x_0$ całka

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt$$

i przy tym

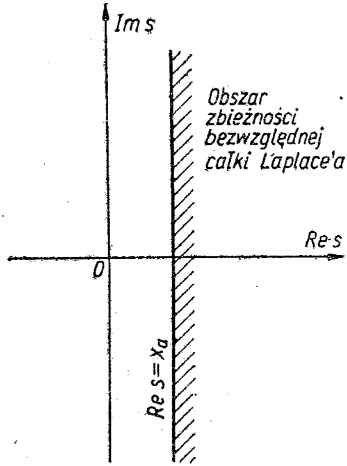
$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty |e^{-s_0t}f(t)|\,dt$$

a więc twierdzenie jest udowodnione.

Dla dowolnej funkcji $f(t)$ musi zajść jeden z następujących trzech możliwych przypadków:

1. całka Laplace'a jest w każdym punkcie s zbieżna bezwzględnie;
2. całka Laplace'a nie jest w żadnym punkcie s zbieżna bezwzględnie (nie wyklucza to zbieżności zwykłej);
3. istnieją takie punkty, w których całka Laplace'a jest zbieżna bezwzględnie oraz takie punkty, w których całka Laplace'a nie jest zbieżna bezwzględnie (znów nie wyklucza to zbieżności zwykłej, której obecnie nie badamy).

W przypadku trzecim z twierdzenia 3-1 wynika, że istnieje taka liczba rzeczywista x_a, że dla $\mathrm{Re}\, s = x > x_a$ całka Laplace'a jest zbieżna bezwzględnie, a dla $\mathrm{Re}\, s = x < x_a$ całka Laplace'a nie jest zbieżna bezwzględnie. Widzimy więc, iż w tym przypadku istnieje obszar zbieżności bezwzględnej całki Laplace'a $\mathrm{Re}\, s > x_a$, który jest półpłaszczyzną położoną na prawo od prostej $\mathrm{Re}\, s = x_a$ (rys. 3-1).



Rys. 3-1. Obszar zbieżności bezwzględnej całki Laplace'a

Określoną poprzednio liczbę x_a będziemy nazywać *odciętą zbieżności bezwzględnej*, prostą $\mathrm{Re}\, s = x_a$ — *prostą zbieżności bezwzględnej*, a obszar $\mathrm{Re}\, s > x_a$ — *obszarem* (*półpłaszczyzną*) *zbieżności bezwzględnej* całki Laplace'a.

Jeśli umówimy się ponadto, iż w przypadku pierwszym będziemy przyjmować: $x_a = -\infty$, a w przypadku drugim: $x_a = +\infty$, to w każdym z tych przypadków będzie można mówić o odciętej zbieżności bezwzględnej x_a, skończonej albo nieskończonej. Dla $x_a = -\infty$ obszar zbieżności bezwzględnej jest całą płaszczyzną, dla $x_a = +\infty$ obszar ten redukuje się do zbioru pustego.

Podziałowi osi rzeczywistej liczbą x_a na dwie półproste odpowiada, wobec twierdzenia 3-1, podział całej płaszczyzny liczbowej prostą $\mathrm{Re}\, s = x_a$ na dwie półpłaszczyzny. Sama prosta $\mathrm{Re}\, s = x_a$ może przy tym albo całkowicie należeć do obszaru zbieżności bezwzględnej (wówczas dla $\mathrm{Re}\, s \geqslant x_a$ całka Laplace'a jest bezwzględnie zbieżna, dla $\mathrm{Re}\, s < x_a$ — nie jest bezwzględnie zbieżna), albo całkowicie nie należeć (wówczas dla $\mathrm{Re}\, s > x_a$ całka Laplace'a jest bezwzględnie zbieżna, a dla $\mathrm{Re}\, s \leqslant x_a$ — nie jest bezwzględnie zbieżna).

Lp.	Funkcja $f(t)$	Transformata Laplace'a $\bar{f}(s)$	Uwagi
1	1	$\frac{1}{s}$	por. wzór (3-15)
2	t	$\frac{1}{s^2}$	
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	n – l. naturalna por. wzór (3-21)
4	t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$	$\nu > -1$ $\Gamma(\nu+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^\nu \, dx$ – funkcja Γ Eulera por. wzory (3-37), (3-38)
5	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	por. wzór (3-194)
6	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{s^{3/2}}$	por. wzór (3-196)
7	$t^{n-1/2}$	$\sqrt{\pi}\, \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{s^{n+1/2}}$	n – l. naturalna por. wzór (3-196)
8	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	por. wzór (3-16)