A. Jak już wspominaliśmy w podrozdziale 1.3 — wzór (1-19) — jednostronne przekształcenie Laplace'a jest określone zależnością

$$\bar{f}(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{3-1}$$

która funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje jej $\mathscr{L}$-transformatę $\bar{f}(s)$, będącą funkcją zmiennej zespolonej $s = x+jy$; zmienna s odgrywa przy całkowaniu rolę parametru.

Całkę występującą we wzorze (3-1) będziemy nazywać *całką Laplace'a* funkcji $f(t)$.

TWIERDZENIE 3-2. *Jeśli całka Laplace'a funkcji $f(t)$ jest zbieżna w punkcie $s_0 = x_0+jy_0$, to jest ona zbieżna we wszystkich punktach $s = x+jy$ takich, że* $\operatorname{Re} s = x > x_0$.

Dowód. Wprowadźmy funkcję pomocniczą

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\,d\tau \tag{3-5}$$

która jest ciągła w przedziale $[0, +\infty)$; ma ona przy tym granicę dla $t \to +\infty$, albowiem

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \int_0^\infty e^{-s_0\tau} f(\tau)\,d\tau$$

(całka ta z założenia istnieje), a zatem jest także w przedziale $[0, +\infty)$ ograniczona, tzn. $|\varphi(t)| \leqslant M$.

Rozpatrzmy teraz całkę

$$\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

którą przez całkowanie przez części można następująco przekształcić i uzależnić od $\varphi(t)$

$$\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0t} f(t)\,dt = e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\Big|_0^T +$$

$$+(s-s_0)\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\,dt = e^{-(s-s_0)T}\varphi(T)+(s-s_0)\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\,dt$$

Wykażemy teraz, że dla $\mathrm{Re}(s-s_0) > 0$ (tj. dla $x > x_0$) istnieje granica prawej strony tej równości dla $T \to +\infty$, a tym samym, że istnieje także granica lewej strony, tj. całka Laplace'a funkcji $f(t)$. Ponieważ dla $\mathrm{Re}\,(s-s_0) > 0$ mamy

$$\lim_{T\to+\infty} e^{-(s-s_0)T}\varphi(T) = 0$$

wystarczy więc wykazać zbieżność całki

$$\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\,dt$$

Całka ta jest istotnie zbieżna i to bezwzględnie, funkcja podcałkowa da się bowiem następująco oszacować dla $x > x_0$

$$|e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)| = e^{-(x-x_0)t}|\varphi(t)| \leqslant M e^{-(x-x_0)t}$$

a więc

$$\int_0^\infty |e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)|\,dt \leqslant M\int_0^\infty e^{-(x-x_0)t}\,dt = \frac{M}{x-x_0}$$

Wykazaliśmy zatem, że całka Laplace'a funkcji $f(t)$ jest zbieżna dla $\mathrm{Re}\,s > \mathrm{Re}\,s_0$, przy czym da się ona w tym obszarze przedstawić w postaci

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\,dt \tag{3-6}$$

Dalsze rozumowanie przebiega analogicznie, jak dla zbieżności bezwzględnej. Dla dowolnej funkcji $f(t)$ musi zajść jeden z następujących trzech przypadków:

1. całka Laplace'a jest w każdym punkcie s zbieżna;
2. całka Laplace'a jest w każdym punkcie s rozbieżna;
3. istnieją takie punkty, w których całka Laplace'a jest zbieżna i istnieją takie punkty, w których całka Laplace'a jest rozbieżna.

3.1.6. WARUNKI WYSTARCZAJĄCE ISTNIENIA TRANSFORMATY

A. W wielu zagadnieniach rachunku operatorowego doniosłe znaczenie mają tzw. *funkcje typu wykładniczego* określone następująco.

Funkcję $f(t)$ określoną (prawie wszędzie) dla $t \geq 0$ i całkowalną w każdym przedziale $[0, T]$, $T > 0$, nazywamy *funkcją typu wykładniczego*, jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste ϱ i $M > 0$, że dla $t \geq 0$

$$|f(t)| \leqslant M e^{\varrho t} \tag{3-24}$$

Z nierówności (3-24) wynika, że wykres funkcji $f(t)$ typu wykładniczego jest zawarty między wykresami funkcji $Me^{\varrho t}$ i $-Me^{\varrho t}$ (rys. 3-4).

Jeśli funkcja $f(t)$ spełnia nierówność (3-24) dla M i $\varrho = \varrho_1$, to spełnia ją oczywiście także dla M i $\varrho = \varrho_2 > \varrho_1$.

W szczególności, jeśli nierówność (3-24) jest spełniona dla $\varrho = 0$, to funkcja $f(t)$ jest dla $t \geq 0$ ograniczona.

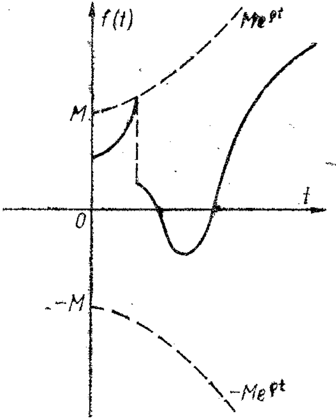
TWIERDZENIE 3-3. *Funkcje typu wykładniczego są bezwzględnie transformowalne.*

Dowód. Jeśli $f(t)$ jest funkcją typu wykładniczego, to dla $t \geq 0$ słuszne jest następujące oszacowanie

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| \leqslant M e^{-(x-\varrho)t}$$

a ponieważ dla $x > \varrho$ istnieje całka

$$\int_0^\infty e^{-(x-\varrho)t} \, dt = \frac{1}{x-\varrho}$$



Rys. 3-4. Wykres funkcji typu wykładniczego ($\varrho > 0$)

a więc całka Laplace'a funkcji $f(t)$ jest dla $x > \varrho$ bezwzględnie zbieżna i przy tym

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leqslant \frac{M}{x-\varrho} \tag{3-25}$$

Z twierdzenia 3-3 wynika, że warunki określające funkcje typu wykładniczego są warunkami wystarczającymi transformowalności funkcji. Nie są one jednak warunkami koniecznymi, istnieją bowiem funkcje transformowalne, które nie spełniają nierówności (3-24) (por. część B, przykład 4).

Tabl. (cd.)

Lp.	Funkcja $f(t)$	Transformata Laplace'a $\bar{f}(s)$	Uwagi
9	$\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	
10	$\frac{e^{-\alpha_1 t}-e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2-\alpha_1}$	$\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	
11	$\frac{\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}-\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_1-\alpha_2}$	$\frac{s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	
12	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	n—l. naturalna por. wzór (3-141)
13	$\frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t}+\alpha t-1\right)$	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	
14	$\frac{1}{\alpha^2}\left[1-(1+\alpha t)\,e^{-\alpha t}\right]$	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	
15	$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{\alpha_1 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_2 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}$	$\frac{1}{s(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	
16	$\frac{e^{-\alpha_1 t}-\left[1+(\alpha_2-\alpha_1)t\right]e^{-\alpha_2 t}}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}$	$\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)^2}$	
17	$\frac{-\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}+\left[\alpha_1+\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)t\right]e^{-\alpha_2 t}}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}$	$\frac{s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)^2}$	