Systemy kolejkowe

Systemy kolejkowe

2026

Najważniejsze informacje odnośnie rozkładu wykładniczego

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, gdy jej funkcja gęstości wyraża się wzorem

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Wtedy dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Jeśli chodzi o wartość oczekiwaną zmiennej losowej X to dana jest ona wzorem

$$\mathbb{E}[X] = \int\limits_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Najważniejsze informacje odnośnie rozkładu wykładniczego c.d.

Natomiast wariancja

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Własność braku pamieci rozkładu wykładniczego. Dla każdego $s, t > 0$ zachodzi

$$\begin{aligned} P(X > t + s \mid X > s) &= \frac{P(X > t + s, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+s)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = e^{-\lambda t} = P(X > t) \end{aligned}$$

Najważniejsze informacje odnośnie rozkładu wykładniczego c.d.

Rozkład zmiennej losowej $\min\{X_1, X_2\}$, gdzie X_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ a X_2 rozkład wykładniczy z parametrem μ oraz X_1 i X_2 są niezależne

$$
\begin{aligned}
P(\min\{X_1, X_2\} \leq t) &= 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > t) \\
&= 1 - P(X_1 > t, X_2 > t) \\
&= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) \\
&= 1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t} \\
&= 1 - e^{-(\lambda+\mu)t},
\end{aligned}
$$

Widzimy, że ta zmienna losowa ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda + \mu$

Systemy kolejkowe jako łańcuch Markowa z czasem ciągłym

Proces stochastyczny $\{X(t) : t \geq 0\}$, *który przyjmuje wartości w zbiorze* $\{0, 1, ...\}$, *nazywamy łancuchem Markowa w czasie ciągłym, gdy*

$$\mathbb{P}(X(s+t) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), u \in [0, s)) = \mathbb{P}(X(s+t) = j | X(s) = i)$$

dla $s, t, u \in [0, \infty)$, $i, j, x(u) \in \{0, 1, ...\}$.
Ponadto mówimy, że łańcuch Markowa z czasem ciągłym jest jednorodny w czasie, gdy

$$\mathbb{P}(X(s+t) = j | X(s) = i) = \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i) = \mathbb{P}_{ij}(t)$$

Równoważnie łańcuch Markowa z czasem ciągłym możemy definiować jako proces stochastyczny, dla którego

- dla każdego stanu $i \in \{0, 1, ...,\}$ rozkład czasu przebywania w tym stanie jest wykładniczy z parametrem λ_i,
- gdy proces opuszcza stan i, to przechodzi do stanu j z prawdopodobieństwem P_{ij}, $i \neq j$.

Wielkości charakterystyczne dla systemu kolejkowego

Najważniejszymi liczbowymi charakterystykami systemu kolejkowego są:

- L - średnia liczba klientów w systemie,
- L_Q - średnia liczba klientów czekających w kolejce na obsługę,
- W - średni czas, jaki klient spędza w systemie,
- W_Q - średni czas, jaki spędza klient czekając na obsługę.

Wielkości charakterystyczne dla systemu kolejkowego c.d.

Niech $X(t)$ będzie liczbą klientów w systemie w chwili t oraz niech

$$P_n(t) = P(X(t) = n)$$

$$P_n = \lim_{t->\infty} P(X(t) = n)$$

oznacza p-stwo, że w chwili t w systemie znajduje się n klientów. Wtedy

$$L = \mathbb{E}[X(t)] = \sum_n nP_n, \qquad L_Q = \sum_{n \geq k} (n-k)P_n$$

gdzie k oznacza liczbę stanowisk obsługi. Ponadto

$$W = \mathbb{E}[\text{czas spędzony w systemie}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\text{czas spędzony w systemie} \mid \text{n osób w systemie przy wejściu}] \cdot P_n$$

Wielkości charakterystyczne dla systemu kolejkowego c.d.

Klient musi odczekać w systemie

- $\frac{1}{\mu}$, gdy $n < k$
- gdy $n \geq k$ oznaczmy

$$Y = \min\{X_1, ..., X_k\},$$

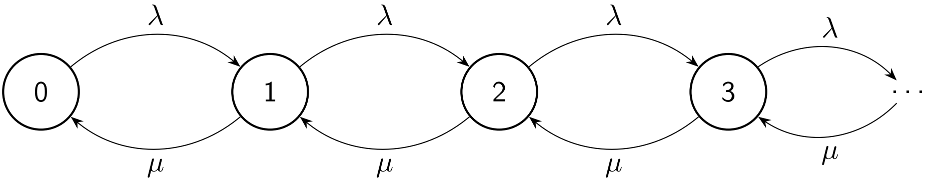
gdzie X_i oznacza czas obsługi klienta przy i-tym stanowisku. Każdy z X_i ma na mocy własności braku pamięci rozkłąd wykładniczy z parametrem μ. Wtedy każdy klient musi odczekać średnio $\frac{1}{k\mu}$ zatem

$$W = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{\mu} P_n + \sum_{n=k}^{\infty} (\frac{n-k+1}{k\mu} + \frac{1}{\mu}) P_n.$$

Natomiast dla W_Q otrzymujemy

$$W_Q = \sum_{n=k}^{\infty} (\frac{n-k+1}{k\mu}) P_n.$$

System z jednym stanowiskiem i nieograniczoną pojemnością



$$
\begin{cases}
\lambda P_0 = \mu P_1 \\
(\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, \; n \geq 1
\end{cases}
$$

System z jednym stanowiskiem i nieograniczoną pojemnością

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + (P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}), \ \ n \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0 = P_0 \\ P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + (P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = (\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0 \\ P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + (P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1) = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^3 P_0 \\ \dots \\ P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + (P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}) = \frac{\lambda}{\mu} P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^{n+1} P_0. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 = \frac{P_0}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = 1.$$

$$\begin{cases} P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \\ P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}). \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy

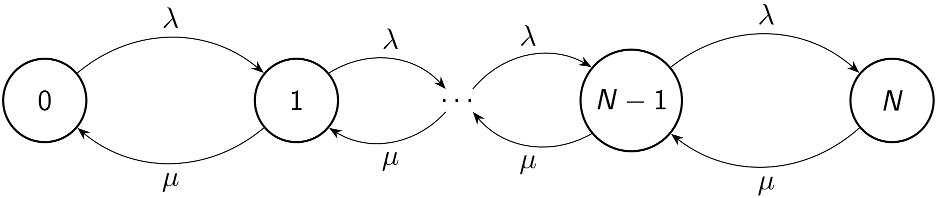
$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

$$L_Q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)},$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\mu} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\mu} (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

$$W_Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mu} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mu} (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

System z jednym stanowiskiem obsługi i ograniczoną pojemnością



$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, 1 \leq n \leq N-1 \\ \mu P_N = \lambda P_{N-1}. \end{cases}$$

System z jednym stanowiskiem obsługi i ograniczoną pojemnością c.d.

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} \right), 1 \leq n \leq N-1 \\ P_N = \frac{\lambda}{\mu} P_{N-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 \right) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 \\ \vdots \\ P_{N-1} = \frac{\lambda}{\mu} P_{N-2} + \left(P_{N-2} - \frac{\lambda}{\mu} P_{N-3} \right) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{N-1} P_0 \\ P_N = \frac{\lambda}{\mu} P_{N-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^N P_0. \end{cases}$$

System z jednym stanowiskiem obsługi i ograniczoną pojemnością c.d.

Suma prawdopodobieństw ma być równa jeden zatem

$$1 = \sum_{n=0}^{N} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

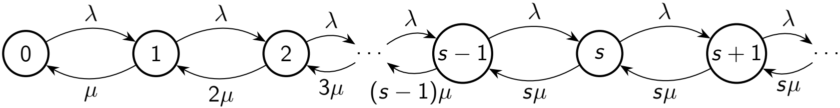
czyli

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

W ten sposób uzyskujemy

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1 - \frac{\lambda}{\mu})}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}, n = 0, 1, ..., N.$$

System z s stanowiskami obsługi i nieograniczoną pojemnością



$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda + n\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1}, 1 < n < s \\ (\lambda + s\mu)P_n = \lambda P_{n-1} + s\mu P_{n+1}, n \geq s. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_{n+1} = \frac{\lambda}{(n+1)\mu} P_n + \left(\frac{n}{n+1} P_n - \frac{\lambda}{(n+1)\mu} P_{n-1} \right), 1 < n < s \\ P_{n+1} = \frac{\lambda}{s\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{s\mu} P_{n-1} \right), n \geq s. \end{cases}$$

Wyznaczenie prawdopodobieństw P_n

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu} P_1 + \left(\frac{1}{2} P_1 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 P_0 \\
P_3 &= \frac{\lambda}{3\mu} P_2 + \left(\frac{2}{3} P_2 - \frac{\lambda}{3\mu} P_1 \right) = \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_s &= \frac{\lambda}{s\mu} P_{s-1} + \left(\frac{s-1}{s} P_{s-1} - \frac{\lambda}{s\mu} P_{s-2} \right) = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s P_0 \\
P_{s+1} &= \frac{\lambda}{s\mu} P_s + \left(P_s - \frac{\lambda}{s\mu} P_{s-1} \right) = \frac{1}{s} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{s+1} P_0 \\
P_{s+2} &= \left(\frac{1}{s} \right)^2 \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{s+2} P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{s} \right)^{n-s} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, \quad \text{dla } n \geq s.
\end{aligned}
$$

Wyznaczenie prawdopodobieństw P_n

$$1 = \sum_{n=0}^{s} P_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + P_0 \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n$$

Ostatecznie uzyskujemy

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n}$$

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \qquad n \le s$$

$$P_n = \left(\frac{1}{s}\right)^{n-s} \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \qquad n > s$$