Wielokątowe fraktale samopodobne i ich podstawowe własności

Kinga Grobelna
specjalność: matematyka nauczycielska

13 maja 2026

Spis treści

Fraktal

W znaczeniu potocznym fraktal oznacza najczęściej obiekt samopodobny albo "nieskończenie złożony". Pojęcie fraktala zostało wprowadzone do matematyki w latach 70. ubiegłego wieku przez Benoita Malderborta.

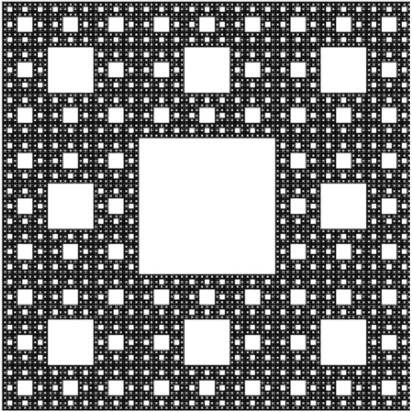


Figura ściśle samopodobna

Figurę F nazywamy ściśle samopodobną wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci skończonej sumy $F = F_1 \cup \cdots \cup F_N$, $N \geqslant 2$ figur F_i spełniających następujące warunki:

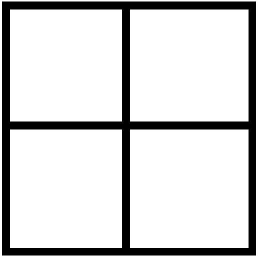
1. $\forall i \in \{1, \cdots N\}$ figury F_i są podobne do F w tej samej skali $s \in (0, 1)$,
2. $\forall i, j \in \{1, \cdots N\}(i \neq j \implies \operatorname{int}_F(F_i) \cap \operatorname{int}_F(F_j) = \emptyset)$, gdzie $\operatorname{int}_F(A)$ oznacza wnętrze A w F.

Dopuszczamy jednak możliwość, że $\exists i, j \in \{1, \cdots N\}(i \neq j \implies \operatorname{bd}_F(F_i) \cap \operatorname{bd}_F(F_j) \neq \emptyset)$, gdzie $\operatorname{bd}_F(A)$ oznacza brzeg A w przestrzeni F.

Niech S będzie kwadratem jednostkowym w kartezjańskim układzie współrzędnych, tzn.:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}.$$

Podzielmy ten kwadrat na 4 mniejsze części poprzez połączenie środka jednego boku ze środkiem boku przeciwległego.



Przykład 2: krzywa Kocha

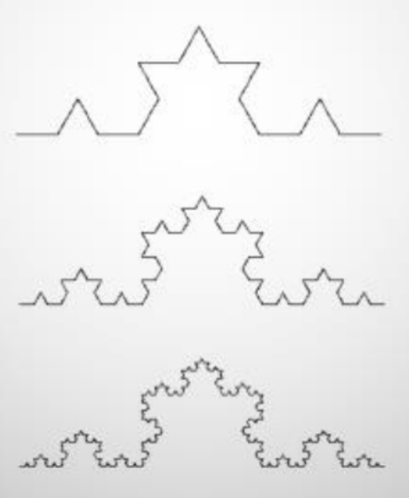
Niech K_0 będzie jednostkowym odcinkiem w kartezjańskim układzie współrzędnych, tzn.:

$$K_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}.$$

K_1 powstaje poprzez podział K_0 na 3 przystające odcinki oraz zastąpieniu środkowego z nich dwoma odcinkami o długości $\frac{1}{3}$ w taki sposób, że tworzą one z usuniętym odcinkiem trójkąt równoboczny (K_1 składa się zatem z 4 przystających odcinków o długości $\frac{1}{3}$).

Przykład 2: krzywa Kocha cd.

Powyższą procedurę powtarzamy dla każdego nowopowstającego odcinka, przy czym nowotworzone odcinki są dobierane cały czas po tej samej stronie powstającej łamanej. Gdy n jest duże łamane K_n oraz K_{n-1} różnią się jedynie w niewielkich szczegółach, a ponieważ n dąży do nieskończoności sekwencja łamanych K_n zbliża się do krzywej granicznej K nazywaną krzywą Kocha.

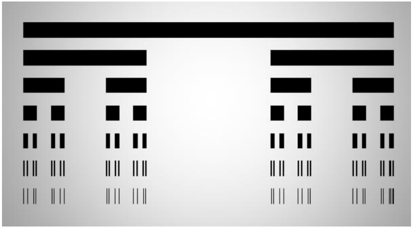


Przykład 3: zbiór Cantora

Niech C_0 będzie odcinkiem jednostkowym w kartezjańśkim układzie współrzędnych, tzn.:

$$C_0 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}.$$

C_1 powstaje poprzez podział C_0 na 3 przystające odcinki, każdy o długości $\frac{1}{3}$ oraz usunięcie wnętrza środkowego z nich.
Powyższą procedurę powtarzamy dla każdego nowopowstałego odcinka.
Figurę $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ nazywamy zbiorem Cantora.



Wielokątowe figury ściśle samopodobne

Figura wielokątowa

Niech $F \subset \mathbb{R}^2$ będzie figurą płaską. O figurze F mówimy, że jest **wielokątowa** wtedy, gdy

- $F = T_1 \cup \cdots \cup T_N, N \geqslant 1,\ T_i$ - domknięty trójkąt,
- $\forall i, j \in \{1, \cdots, N\}(i \neq j \implies \mathrm{int}(T_i) \cap \mathrm{int}(T_j) = \emptyset)$.

Konstrukcja

Krok 0:
Rozpoczynamy od wyjściowego wielokąta (figury wielokątowej):

$$K_0 = W_0.$$

Krok 1:
Tworzymy N pomniejszonych kopii wielokąta W_0, podobnych do W_0 w tej samej skali s w taki sposób, że każda utworzona w ten sposób kopia zawiera się w W_0 oraz każde dwie utworzone kopie mają rozłączne wnetrza, a następnie bierzemy ich sumę:

$$K_1 = W_1 \cup \cdots \cup W_N = \varphi_1(W_0) \cup \cdots \cup \varphi_N(W_0) = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(W_0).$$

Konstrukcja cd.

Krok 2:
W każdej z N pomniejszonych kopii z K_1 ponownie umieszczamy N pomniejszonych kopii, stosując to samo przekształcenie podobieństwa co wcześniej, jednak tym razem dla każdej części figury z K_1. Otrzymujemy w ten sposób N^2 kawałków, z których każdy jest podobny do W_0 w skali s^2 i sumujemy je:

$$K_2 = \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_j(\varphi_i(W_0)) = \bigcup_{i,j=1}^{N} (\varphi_j \circ \varphi_i)(W_0).$$

Krok n:
W kroku n - tym otrzymujemy N^n kawałków, gdzie każdy z nich to obraz W_0 przekształcony n - krotnie z tą samą skalą podobieństwa s. Zatem każdy taki kawałek jest podobny do W_0 w skali s^n, a ich suma przedstawia się następująco:

$$K_n = \bigcup_{i_n=1}^{N} \bigcup_{i_{n-1}=1}^{N} \cdots \bigcup_{i_1=1}^{N} (\varphi_{i_n} \circ \varphi_{i_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0).$$

Obserwacja

Definiujemy fraktal Z jako $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$.

Dla każdego n zachodzi następujące zawieranie:

$$K_{n+1} \subset K_n \subset K_0.$$

Dowód opiera się na fakcie, że każda kopia z pierwszej iteracji konstrukcji $W_i = \varphi_i(W_0)$ zawiera się w wyjściowej figurze wielokątowej W_0. Każdy kolejny zbiór K_{n+1} powstaje przez ponowne zastosowanie odwzorowań samopodobieństwa do kawałków zbioru K_n. Ponieważ odwzorowania zachowują inkluzję, obrazy mniejszych kawałków nadal pozostają wewnątrz wcześniejszych kawałków. W efekcie każdy element K_{n+1} zawiera się w pewnym elemencie K_n, więc otrzymujemy zstępujący ciąg zbiorów (K_n).

Własność 1.

Własność

Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ kopie n - tej iteracji konstrukcji figury Z postaci

$$(\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$$

mają parami rozłączne wnętrza.

Dowód jest przeprowadzony indukcyjnie względem numeru iteracji. Dla pierwszego kroku rozłączność wnętrz wynika bezpośrednio z definicji konstrukcji. W kroku indukcyjnym rozważamy dwie różne kopie na poziomie $n+1$. Są dwie możliwości: albo różnią się ostatnim odwzorowaniem albo mają to samo ostatnie odwzorowanie. W obu przypadkach dostajemy rozłączność wnętrz.

Własność 2.

Własność

Fraktal Z jest figurą niepustą.

Dowód polega na śledzeniu jednej nieskończonej ścieżki w konstrukcji figury. W każdym kroku wybieramy jedną z pomniejszonych kopii i przechodzimy do coraz mniejszych fragmentów. Ponieważ każda kolejna kopia jest skalowana przez czynnik $s < 1$, ich średnice dążą do zera. Dzięki temu otrzymujemy ciąg punktów zbieżny do pewnego punktu granicznego. Ten punkt należy do wszystkich zbiorów K_n, bo konstrukcja jest zagnieżdżona, więc należy również do ich przecięcia.

Własność 3.

Własność

Fraktal Z składa się z co najmniej 2 punktów.

W dowodzie rozważamy dwa różne odwzorowania i budujemy dwa ciągi punktów, powtarzając każde z nich osobno. Oba ciągi są zbieżne, a ich granice należą do figury Z, więc dostajemy dwa punkty $x, y \in Z$. Następnie pokazujemy, że znalezione punkty są różne poprzez pokazanie, że są punktami stałymi odpowiednich przekształceń.

Własność 4.

Własność

Fraktal Z składa się z nieprzeliczalnie wielu punktów.

Dowód polega na przypisaniu każdemu nieskończonemu ciągowi indeksów punktu znajdującego się we fraktalu Z. Najpierw pokazujemy, że dla każdego takiego ciągu otrzymujemy zstępujący ciąg zbiorów o średnicach dążących do zera, więc ich przekrój zawiera dokładnie jeden punkt z_α, który należy do Z. Następnie pokazujemy, że różne ciągi dają różne punkty. W ten sposób otrzymujemy odwzorowanie $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to Z$ zadane przyporządkowanie $\alpha \mapsto z_\alpha$.

Własność 5.

Własność

We fraktalu Z nie ma punktów izolowanych.

Dowód polega na pokazaniu, że w każdym otoczeniu dowolnego punktu $x \in Z$ można znaleźć inny punkt z Z. Wybieramy więc małą kopię konstrukcji na tyle głęboko, aby zmieściła się w zadanym otoczeniu $K(x, r)$. Następnie w tej kopii budujemy dwie różne nieskończone ścieżki w konstrukcji, które prowadzą do dwóch różnych punktów y_0 i y_1 należących do Z. Oba te punkty leżą w wybranej małej kopii, a więc w otoczeniu x, i są różne. To oznacza, że każde otoczenie punktu x zawiera inny punkt zbioru Z, więc x nie może być izolowany.