

1. (1.5 punktu) Zaprogramuj adaptacyjną wersję kwadratury Gaussa. Dokładniej, błąd można szacować porównując wartość dla przedziału z sumą wartości dla podprzedziałów. Jeśli oszacowanie przekracza założony błąd to należy przedział podzielić na połowy i rekursywnie powtórzyć obliczenia dla każdego z podprzedziałów z osobna. Obliczenia zatrzymujemy gdy osiągniemy zadaną dokładność albo po przekroczeniu maksymalnej ilości podziałów (np. 20).

2. (1 punkt) W Lemacie 3.2 pokazaliśmy że wielomiany Legendra p_n spełniają związek rekurencyjny $xp_n = a_n p_{n+1} + b_n p_{n-1}$. Uzasadnij że w bazie $\{p_j : j = 0, \dots, N\}$ operator T zdefiniowany przed Lematem 2.3 ma macierz $t_{i,j}$ której jedne niezerowe elementy to $t_{j-1,j} = b_j$ oraz $t_{j+1,j} = a_j$. Uzasadnij że węzły kwadratury Gaussa można wyznaczyć ze współczynników rekurencji znajdując wartości własne macierzy $t_{i,j}$.

3. (0.5 punktu) Podaj inny od $\sin(|x - a|)$ przykład funkcji dla której adaptacyjna kwadratura Gaussa da stosunkowo duży błąd. Użyjcie możliwe proste wzór.