

# Metody różnicowe

W. Hebisch.

30 marca 2022

## 1 Wstęp

Aby numerycznie rozwiązywać równania różniczkowe musimy w komputerze modelować odpowiednią przestrzeń funkcji i ich pochodne. Najprostszym rozwiązaniem jest reprezentowanie funkcji przez wartości w skończonym ciągu punktów  $x_i$  i zastąpienie pochodnych przez różnice skończone. Teraz nas interesują równania różniczkowe zwyczajne, dla nich najprościej użyć równoodległych punktów  $x_i = x_0 + ih$  gdzie  $h > 0$  nazywa się krokiem.

Równania różniczkowe zwyczajne wyższego rzędu można zastąpić przez układy równań rzędu pierwszego, więc dla uproszczenia w dalszym ciągu ograniczymy się do układów równań rzędu pierwszego. Taki układ można zapisać jako pojedyncze równanie dla funkcji o wartościach wektorowych:

$$(1) \quad y'(x) = F(x, y(x))$$

gdzie  $x$  przyjmuje wartości z pewnego przedziału, zaś  $y$  i  $F$  przyjmują wartości w  $\mathbb{R}^m$  dla pewnego  $m$ . Na razie interesuje nas zagadnienie początkowe, tzn. zadana jest wartość  $y_0 = y(x_0)$  gdzie  $x_0$  to punkt początkowy.

Jak powiedzieliśmy wcześniej, wartości  $y$  będziemy przybliżać dla równoodległych punktów  $x_i$ . Niech  $y_i$  będzie przybliżoną wartością rozwiązania  $y$  w punkcie  $x_i$ . Oznaczmy  $z_i = F(x_i, y_i)$ . W metodach różnicowych zastępujemy równanie (1) przez równanie dla różnic skończonych, postaci

$$(2) \quad \sum_j a_j y_{i-j} = h \sum_j b_j z_{i-j}.$$

Powyżej lewa strona reprezentuje przybliżenie  $y'$  za pomocą różnic skończonych, tzn. ogólne takie przybliżenie można zapisać jako kombinację liniową  $y_{i-j}$ . Normalnie różnice skończone dzielilibyśmy przez  $h$ . Aby uniknąć dzielenia pomijamy  $h$  po lewej stronie, za to mnożymy prawą stronę przez  $h$ . Na pierwszy rzut oka prawą stronę równania (1) wystarczyłoby zastąpić przez  $z_i$ , ale okaże się że biorąc odpowiednia kombinację liniową jak wyżej można uzyskać lepszą dokładność. Powyższy wzór reprezentuje ogólną postać metody różnicowej, konkretne metody otrzymujemy dobierając wartości współczynników  $a_j$  i  $b_j$ . Naszym celem będzie zbadanie metod różnicowych tak by przy danych  $a_j$

i  $b_j$  umieć przewidzieć zachowanie metody i by umieć dobrać wartości  $a_j$  i  $b_j$  dające dobre metody. Ogólnie  $a_j$  i  $b_j$  mogłyby się zmieniać w trakcie obliczeń (z kroku na krok) ale na razie przyjmujemy że są ustalone. Jak się dalej okaże metoda różnicowa potrzebuje nie tylko  $y_0$  ale również kilka pierwszych  $y_i$ . Na razie zakładamy że te wartości lub dobre przybliżenia są znane. Później omówimy jak je obliczać.

Aby obliczenie było łatwe do praktycznej realizacji chcemy by równanie dało się rozwiązać ze względu na  $y_{i+1}$ , znając  $y_i$  i ustaloną liczbę wartości poprzednich. Równoważnie można zażądać by wyżej  $a_{-1} = -1$  i by dla  $j < -1$  zachodziło  $a_j = 0$  i  $b_j = 0$ . Naturalne jest żądanie by  $b_{-1} = 0$ , ale jak się okaże  $b_{-1} \neq 0$  prowadzi do metod mających lepsze własności. Prowadzi to do równania

$$(3) \quad y_{i+1} = \sum_{j=0}^k a_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^k b_j z_{i-j}$$

które różnie się od równania (2) zmianą znaku przy  $b_j$ . Jeśli powyżej  $b_{-1} = 0$  to mówimy że metoda jest jawna. W przeciwnym razie mówimy że metoda jest niejawna. Dalej będziemy zakładać że jedno z  $a_k$  i  $b_k$  nie jest zerem. To nie zmniejsza ogólności, bo jeśli oba są zerami to wzór można zastąpić wzorem z mniejszym  $k$ . Dla metody jawnej (tzn. gdy  $b_{-1} = 0$ ) znając  $y_0, y_1, \dots, y_k$  wzór (3) dla  $i = k$  daje nam  $y_{k+1}$ . Teraz możemy użyć wzór (3) dla  $i = k + 1$  i dostać  $y_{k+2}$ . Iteracyjnie wyliczymy  $y_i$  dla dowolnie dużych  $i$ . Innymi słowy, znając parametry  $a_j$  i  $b_j$  metody jawnej możemy łatwo napisać program komputerowy obliczający potrzebne  $y_i$ . Dla metod niejawnych sytuacja jest bardziej skomplikowana, wzór (3) jest wtedy nieliniowym równaniem wymagającym specjalnej metody rozwiązywania. Można by wtedy użyć ogólnej metody np. metody Newtona. Lecz okaże się że w praktyce może być wygodnie używanie pary metod, jawnej zwaną predyktorem i niejawnej zwanej korektorem. Przy pomocy metody jawnej (predyktora) możemy otrzymać dobre przybliżenie dla rozwiązania równania metody niejawnej. Równanie metody niejawnej ze względu na  $y_i$  jest równaniem typu punktu stałego:

$$y_i = \phi(y_i).$$

Mając dobre przybliżenie  $t_i$  do  $y_i$  liczymy że  $t_{i+1} = \phi(t_i)$  będzie lepszym przybliżeniem, tak że po niedużej liczbie iteracji dostaniemy wystarczająco dokładne przybliżenie. W praktyce metod różnicowych zwykle wystarcza bardzo mała liczba iteracji typu jedna lub dwie.

## 2 Własności

Teraz krótko powiemy jakie własności chcielibyśmy osiągnąć. Pierwszą jest zbieżność, tzn. chcemy by dla  $h$  dążącego do 0 odpowiednie  $y_i$  zbiegały do dokładnego rozwiązania. By to dokładniej zapisać nieco zmienimy oznaczenia. Przy ustalonym  $x_0$ , niech  $y_{i,h}$  oznacza przybliżone rozwiązanie produkowane przez metodę

z krokiem  $h$ . Pomocniczą funkcję  $\eta_h$  dla  $x \in [i, i + 1)$  zdefiniujemy jako

$$\eta_h(x) = (x - i)y_{i+1,h} + (1 - (x - i))y_{i,h}.$$

Innymi słowy dyskretną funkcję  $y_{i,h}$  zdefiniowaną tylko dla nieujemnych całkowitych  $i$  przedłużamy przy pomocy interpolacji liniowej do funkcji  $\eta_h$  zdefiniowanej dla  $x \in [0, \infty)$ . Uwaga:  $y_i$  zależą od wartości początkowych. By uniknąć nadmiernie skomplikowanych oznaczeń w notacji wyżej nie wspominamy o wartościach początkowych, ale  $\eta_h$  zależy również od nich. Zbieżność oznacza że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_h(hx) = u(x)$$

gdzie  $u$  jest dokładnym rozwiązaniem przy dowolnym wyborze wartości początkowych takim że wartości początkowe  $y_0, \dots, y_k$  dążą do wartości początkowej dla dokładnego rozwiązania.

Chcemy by metoda była stabilna, tzn. żeby nie było niekontrolowanego narastania błędu. Dokładniej, by przy  $h$  dążącym do 0 mały błąd w początkowych krokach czy mała zmiana wartości początkowych prowadziła do ograniczonych zmian w rozwiązaniu przybliżonym. Ogólnie precyzyjne zdefiniowanie stabilności jest kłopotliwe. Dla metod różnicowych podamy prosty warunek i pokażemy że implikuje on dobre zachowanie.

Chcemy też by zbieżność była możliwie szybka. Tu pomocne jest pojęcie rzędu metody. Mówimy że metoda jest rzędu  $l$  gdy

$$y_{k+1,h} - u(h(k+1)) = O(h^{l+1})$$

dla początkowych  $y_j = u(x_0 + jh)$  i  $u$  będącego dokładnym rozwiązaniem.

Intuicyjnie oczekujemy że rozwiązanie przy pomocy metody rzędu  $l$  będzie miało odległość od rozwiązania dokładnego proporcjonalną do  $h^l$ . Dokładniej, by dojść z  $x_0$  do jakiegoś ustalonego punktu potrzebujemy  $i$  rzędu  $h^{-1}$  (czyli rzędu  $h^{-1}$  kroków). W pojedynczym kroku wprowadzamy błąd rzędu  $h^{l+1}$ . Jeśli nie ma fatalnej kumulacji błędów (niestabilności) to błąd po  $i$  krokach można szacować przez sumę błędów czyli przez  $h^{-1}h^{l+1} = h^l$ . Oczywiście powyższe rozumowanie to nie dowód, ale przy odpowiednich założeniach pokażemy podobny wynik.

Okaże się że dla metod różnicowych własności wyżej nie są niezależne:

**Lemat 2.1** *Stabilna metoda różnicowa rzędu dodatniego jest zbieżna.*

Uwaga: W tej części wprowadzamy podstawowe pojęcia. Więcej materiału i dowody będzie dalej.

## 3 Przykłady

### 3.1 Jawna metoda Eulera

Najprostszym przykładem metody różnicowej jest (jawna) metoda Eulera. Jest to metoda jawna z  $k = 0$ ,  $a_0 = b_0 = 1$ . Daje to wzór

$$y_{i+1} = y_i + hz_i = y_i + hF(x_i, y_i).$$

Metodę Eulera otrzymamy zastępując w równaniu (1) pochodną przez różnicę  $\frac{y_{i+1}-y_i}{h}$  (tak to wymyślił Euler). Do metody Eulera można dojść próbując znaleźć najprostszą jawną metodę różnicową rzędu co najmniej 1. By metoda była najprostszą próbujemy  $k = 0$ . Łatwo zobaczyć że dla  $a_0 \neq 1$  i  $y_0 \neq 0$  mamy

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} |y_1 - y_0| > 0$$

czyli metoda nie jest nawet rzędu 0. A więc potrzebujemy  $a_0 = 1$ . Biorąc równanie  $y' = 1$  oraz  $x_0 = y_0 = 0$  mamy dokładne rozwiązanie  $y(x) = x$ . By metoda była rzędu co najmniej 1 potrzebujemy  $b_0 = 1$ . Czyli jedynym możliwym kandydatem jest metoda Eulera. Można sprawdzić że metoda Eulera jest rzędu 1, czyli faktycznie jest najprostszą jawną metodę różnicową rzędu co najmniej 1.

Później zobaczymy że istnieją (stabilne) metody wyższych rzędów i że stabilność jest istotnym ograniczeniem, tzn. przy ustalonym  $k$  większość metod wysokiego rzędu jest niestabilna.

### 3.2 Niejawna metoda Eulera

Jednym z najprostszych przykładów jest niejawna metoda Eulera. W tej metodzie  $k = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = b_{-1} = 1/2$ . Daje to wzór

$$y_{i+1} = y_i + h(z_i + z_{i+1})/2 = y_i + h(F(x_i, y_i) + F(x_{i+1}, y_{i+1}))/2.$$

Jest on związany z przybliżoną równością

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f'(x) + f'(x+h)}{2} + O(h^2).$$

Ten wzór ma wyższy rząd niż prosta różnica i można liczyć że ta metoda będzie rzędu wyższego niż 1. Jak się okaże jest ona metodą rzędu 2.

### 3.3 Jawna metoda rzędu 2

Prostą metodę jawną rzędu 2 można otrzymać wzorując się na powyższym. Mianowicie, widzieliśmy że

$$f'(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2h} + O(h^2).$$

Przekształcając

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x+h) + O(h^3)$$

co w naszej notacji jest

$$y_{i+2} = y_i + 2hz_{i+1}.$$

Innymi słowy  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = b_0 = 0$ ,  $b_1 = 2$ .

## 4 Rząd metody

Powyżej wprowadziliśmy różne metody w niezbyt systematyczny sposób. Jak się okaże, metody różnicowe można generować w dość systematyczny sposób, bazując na warunkach na rząd metody i stabilność.

Powiedzieliśmy że metoda jest rzędu  $l$  gdy

$$y_{k+1,h} - u(h(k+1) + x_0) = O(h^{l+1})$$

dla  $y_{j,h} = u(x_0 + jh)$  i  $u$  będącego dokładnym rozwiązaniem.

Ten warunek na pierwszy rzut oka jest skomplikowany: powinniśmy go sprawdzać dla dowolnego równania. Dokładniej, by warunek miał sens trzeba się ograniczyć do równań zadanych przez funkcje  $F(x, y)$  klasy  $C^l$ . My najpierw otrzymamy warunek konieczny, testując metodę na dość szczególnych równaniach, a potem pokażemy że ten warunek wystarcza dla dowolnych równań klasy  $C^l$ .

Zauważmy najpierw że jeśli  $P(x)$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $l$  to istnieje równanie różniczkowe takie że przy ustalonym  $x_0$  i  $y_0 = P(x_0)$  funkcja  $y(x) = P(x)$  jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym  $y_0$ . Mianowicie, wystarczy wziąć równanie

$$y'(x) = P'(x).$$

Dla takiego równania mamy  $F(x, y) = P'(x)$  i konsekwentnie  $z_i = F(x_i, y_i) = P'(x_i)$ . Dalej,  $y_j = P(x_j)$  dla  $j = 0, \dots, k$  zaś  $y_{k+1}$  jest zadane wzorem

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^k a_j y_{k-j} + h \sum_{j=-1}^k b_j z_{k-j} = \sum_{j=0}^k a_j P(x_{k-j}) + h \sum_{j=-1}^k b_j P'(x_{k-j})$$

Warunek na rząd przybiera postać

$$\sum_{j=0}^k a_j P((k-j)h + x_0) + h \sum_{j=-1}^k b_j P'((k-j)h + x_0) - P(h(k+1)x_0) = O(h^{l+1}).$$

Zauważmy że o ile  $l > 0$  to wyrażenie po lewej stronie jest ze względu na  $h$  wielomianem stopnia co najwyżej  $l$ . Mianowicie, każdy człon pierwszej sumy jest wielomianem stopnia co najwyżej  $l$ , więc ta suma daje wielomianem stopnia co najwyżej  $l$ . W drugiej sumie mamy  $P'$  które jest wielomianem stopnia co najwyżej  $l-1$  (tu istotne jest że  $l > 0$ ). A więc druga suma daje wielomian stopnia co najwyżej  $l-1$ . Czyli druga suma po pomnożeniu przez  $h$  daje wielomian stopnia co najwyżej  $l$  i dodając obie sumy faktycznie dostaniemy wielomian stopnia co najwyżej  $l$ . Lecz dla wielomianów stopnia  $l$  równość  $w(h) = O(h^{l+1})$  oznacza że  $w(h) = 0$ , czyli mamy równość

$$\sum_{j=0}^k a_j P((k-j)h + x_0) + h \sum_{j=-1}^k b_j P'((k-j)h + x_0) = P(h(k+1)x_0).$$

Jest to równanie liniowe ze względu na  $P$  i aby ta równość zachodziła potrzeba i wystarcza by zachodziła równość dla pewnej bazy w przestrzeni wielomianów stopnia nie przekraczającego  $l$ . W naszym przypadku wygodnie jest przyjąć jako bazę wielomiany  $P_m(x) = (x - x_0)^m$  dla  $m = 0, 1, \dots, l$ . Podstawiając  $P_0 = 1$  do równania wyżej i uwzględniając że  $P'_0 = 0$  dostajemy równość

$$\sum_{j=0}^k a_j = 1.$$

Dla  $m > 0$  dostajemy

$$\sum_{j=0}^k a_j ((k-j)h)^m + h \sum_{j=-1}^k b_j m ((k-j)h)^{m-1} = ((k+1)h)^m.$$

Dzieląc obie strony przez  $h^m$  możemy to uprościć do

$$\sum_{j=0}^k a_j (k-j)^m + m \sum_{j=-1}^k b_j (k-j)^{m-1} = (k+1)^m.$$

Teraz pojawia się pytanie czy otrzymane warunki są wystarczające by metoda była rzędu  $l$ ? Okazuje się że tak. Mianowicie, jeśli funkcja  $F$  zadająca równanie jest klasy  $C^l$ , to przy ustalonym  $x_0$  i  $y_0$  rozwiązanie  $u$  jest funkcją klasy  $C^{l+1}$  i można do niego zastosować twierdzenie o rozwinięciu Taylora. Daje to wielomian  $P$  stopnia  $l$ , taki że

$$u(t + x_0) - P(t + x_0) = O(t^{l+1})$$

czyli

$$y_j - P(x_j) = O(h^{l+1})$$

dla  $j = 0, \dots, k$  i

$$u((k+1)h + x_0) - P((k+1)h + x_0) = O(h^{l+1}).$$

Ponadto

$$u'(t + x_0) - P'(t + x_0) = O(t^l)$$

czyli

$$z_j - P'(x_j) = O(h^l)$$

dla  $j = 0, \dots, k$ . A więc

$$\begin{aligned} y_{k+1} - u((k+1)h + x_0) &= \sum_{j=0}^k a_j y_j + h \sum_{j=-1}^k b_j z_j - u((k+1)h + x_0) = \\ &= \sum_{j=0}^k a_j P(x_j) + h \sum_{j=-1}^k b_j P'(x_j) + hb_{-1}(z_{k+1} - P'(x_{k+1})) - P(x_{k+1}) + O(h^{l+1}) = \end{aligned}$$

$$hb_{-1}(z_{k+1} - P'(x_{k+1})) + O(h^{l+1})$$

gdzie ostatnia równość wynika z otrzymanego warunku na rząd metody. Daje to wynik dla metody jawnej. Dla metody niejawnej musimy jeszcze oszacować  $z_{k+1} - P'(x_{k+1})$ . W poprzedniej części powiedzieliśmy że wtedy  $y_{k+1}$  jest rozwiązaniem równania nieliniowego. Dokładniej,

$$y_{k+1} - hb_{-1}F(x_{k+1}, y_{k+1}) = S_F$$

gdzie  $S_F$  nie zależy od  $y_{k+1}$ . Dla dostatecznie małych  $h$  pochodna po  $y_{k+1}$  lewej strony jest niezerowa:

$$\partial_{y_{k+1}}(y_{k+1} - hb_{-1}F(x_{k+1}, y_{k+1})) = 1 - hb_{-1}(\partial_y F)(x_{k+1}, y_{k+1})$$

i dla małych  $h$  drugi człon jest za mały by się skasować z 1. Oznacza to że dla małych  $h$  rozwiązanie zależy w gładki sposób od  $S_F$ . Dla  $F(x, y) = P'$  dokładnym rozwiązaniem jest  $P(x_{k+1})$ . Z wcześniejszych rachunków wynika że

$$S_F - S_P = O(h^{l+1})$$

co razem z gładką zależnością implikuje że  $y_{k+1} - P(x_{k+1}) = O(h^{l+1})$ , co z kolei oznacza że  $y_{k+1} - u(x_{k+1}) = O(h^{l+1})$ , czyli  $z_{k+1} - u'(x_{k+1}) = O(h^{l+1})$ . Lecz  $u'(x_{k+1}) - P'(x_{k+1}) = O(h^l)$ , czyli  $z_{k+1} - P'(x_{k+1}) = O(h^l)$  co daje wynik dla metod niejawnych.

Przykład: Chcemy wyznaczyć jawne metody z  $k = 0$  i  $l \geq 1$ . Dostajemy równania:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ b_0 &= 1 \end{aligned}$$

co daje nam jeszcze raz metodę Eulera. Widać też że warunek dla  $l = 2$  nie jest spełniony, więc metoda Eulera jest dokładnie rzędu 1.

Przykład: Chcemy wyznaczyć niejawne metody z  $k = 0$  i  $l \geq 2$ . Jak wyżej mamy  $a_0 = 1$ . Ponadto

$$\begin{aligned} b_0 + b_{-1} &= 1, \\ 2(b_{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

czyli  $b_0 = b_{-1} = \frac{1}{2}$  (czyli jest to niejawna metoda Eulera). Widać też że warunek dla  $l = 3$  nie jest spełniony, więc ta metoda jest dokładnie rzędu 2.

## 5 Istnienie metod

Nasze warunki na rząd metody są równaniami liniowymi. Pozwala to pokazać istnienie metod (niejawnych) rzędu  $2k+2$  i metod jawnych rzędu  $2k+1$ . Niestety, okaże się że metody wysokiego rzędu są niestabilne i w praktyce musimy używać metod niższego rzędu które są stabilne.

## 6 Błąd metody

Założmy teraz że mamy metodę która jest rzędu  $l$ , ale nie jest wyższego rzędu. Powiemy że stała  $c$  jest błędem metody jeśli

$$y_{k+1,h} - u(h(k+1) + x_0) - c \frac{h^{l+1}}{(l+1)!} u^{(l+1)}(x_0) = O(h^{l+2})$$

dla  $y_{j,h} = u(x_0 + jh)$  i  $u$  będącego dokładnym rozwiązaniem dla dostatecznie gładkiego  $F$ . Postępując podobnie jak przy badaniu rzędu stałą  $c$  można wyznaczyć testując na wielomianach. Dokładniej, wyznaczmy ją na  $P_{l+1} = (x - x_0)^{l+1}$  (dla wielomianów niższego stopnia błąd wynosi 0). Wtedy,

$$c = \sum_{j=0}^k a_j (k-j)^{l+1} + (l+1) \sum_{j=-1}^k b_j (k-j)^l - (k+1)^{l+1}.$$

Podobne rozważanie jak dla rzędu pokazuje że tak wyznaczona stała stosuje się ogólnie.

Komentarz: W literaturze często błąd definiuje się bez czynnika  $(l+1)!$  w mianowniku i z przeciwnym znakiem. Czynnikiem  $(l+1)!$  upraszcza inne wzory i daje bardziej realistyczne oszacowanie wielkości (pochodna rzędu  $(l+1)$  często ma wielkość rzędu  $(l+1)!$ ).

Komentarz: Przy danym rzędzie mniejsza wartość błędu zwykle oznacza lepszą metodę.

Przykład: Dla metody Eulera mamy

$$c = -1$$

Przykład: Dla niejawniej metody rzędu 2 z  $k = 0$  (drugi przykład wyżej) mamy

$$c = 3b_{-1} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Przykład. Metoda jawna Adamsa ma  $k = 3$  i współczynniki  $a_0 = 1$ ,  $a_j = 0$  dla  $j > 0$ ,  $b_0 = \frac{55}{24}$ ,  $b_1 = -\frac{59}{24}$ ,  $b_2 = \frac{37}{24}$ ,  $b_3 = -\frac{9}{24}$ . Można sprawdzić że jest to metoda rzędu 4. Dla błędu mamy

$$c = 3^5 + 5(b_2 + 2^4 b_1 + 3^4 b_0) - 4^5 = -\frac{251}{6}.$$

Program przykładowy `diff.input` pozwala znaleźć metody różnicowe zadane-go rzędu. Poniżej pokazujemy jak on działa dla metod jawnych z  $k = 1$  (dwa punktów) i rzędu 3:

```
-- Ilość punktów  
i := 2
```

```
(1) 2
```



```

-- Oczekiwany rząd
r := 3
Type: PositiveInteger

(2) 3
Type: PositiveInteger
l1 := concat([1 for j in 0..i], [0 for j in 0..(i-1)])

(3) [1, 1, 1, 0, 0]
Type: List(NonNegativeInteger)
l1 := [l1]

(4) [[1, 1, 1, 0, 0]]
Type: List(List(NonNegativeInteger))
for q in 0..(r - 1) repeat
  l1 := concat([j^(q + 1) for j in 0..i],
               [(q+1)*j^q for j in 0..(i-1)])
  l1 := cons(l1, l1)
Type: Void

m := matrix(reverse(l1))

(6)
+1  1  1  0  0+
|
|0  1  2  1  1|
(6) |
|0  1  4  0  2|
|
+0  1  8  0  3+
Type: Matrix(NonNegativeInteger)

sols := nullSpace(m)

(7) [[5, - 4, - 1, 2, 4]]
Type: List(Vector(Integer))
sol1 := first(sols)

(8) [5, - 4, - 1, 2, 4]
Type: Vector(Integer)

```

```
lc := entries(sol1)
```

```
(9) [5, - 4, - 1, 2, 4]
```

Type: List(Integer)

```
la0 := reverse(first(lc, i+1))
```

```
(10) [- 1, - 4, 5]
```

Type: List(Integer)

```
lb0 := reverse(rest(lc, i+1))
```

```
(11) [4, 2]
```

Type: List(Integer)

```
aa := first(la0)
```

```
(12) - 1
```

Type: Integer

```
la := [-a/aa for a in rest(la0)]
```

```
(13) [- 4, 5]
```

Type: List(Fraction(Integer))

```
lb := [-b/aa for b in lb0]
```

```
(14) [4, 2]
```

Type: List(Fraction(Integer))