

Metody różnicowe 2

W. Hebisch.

6 kwietnia 2022

1 Stabilność

Powiedzieliśmy że stabilność oznacza że nie ma katastrofального narastania błędów gdy chcemy obliczyć rozwiązanie w ustalonym punkcie różnym od x_0 i krok h dąży do 0. Znow, powinno to zachodzić dla wszystkich równań z dostatecznie regularnym F . Warunkiem koniecznym jest by zachodziło to dla $F = 0$, tzn. równania $y' = 0$. Dla $y_0 = 0$ rozwiązaniem dokładnym jest $y(x) = 0$. Brak katastrofального narastania błędów oznacza że rozwiązanie przybliżone jest ograniczone dla danych początkowych ze zbioru ograniczonego i h dążącego do 0. W terminach y_i nasze równanie przybiera postać

$$(1) \quad y_{i+1} = \sum_{j=0}^k a_j y_{i-j}$$

(człony z b_j pomineliśmy bo dla naszego równania $z_i = 0$). h dążące do 0 oznacza że by dostać się do ustalonego $x \neq x_0$ musimy używać i dążącego do nieskończoności. A więc koniecznym warunkiem stabilności jest by rozwiązania równania różnicowego (1) pozostawały ograniczone dla $i \geq 0$. Będziemy mówić że metoda jest stabilna jeśli spełnia ten warunek (później pokażemy że ten warunek faktycznie prowadzi do stabilności tak jak definiowaliśmy wyżej).

Lemat 1.1 *Równanie różnicowe (1) ma $k + 1$ liniowo niezależnych rozwiązań. Wszystkie rozwiązanie pozostają ograniczone dla $i \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy wielomian $A(s) = s^{k+1} - \sum_{j=0}^k a_{k-j} s^j$ ma wszystkie pierwiastki w dysku $|s| \leq 1$ i pierwiastki o module 1 są pojedyncze.*

Dowód. Jeśli $s = 0$ jest pierwiastkiem wielomianu A krotności l to pierwsze l współczynników A jest zerowe i y_i dla $i \geq l$ nie zależy od pierwszych l wartości początkowych. Innymi słowy mamy przestrzeń rozwiązań wymiaru l takich że $y_i = 0$ dla $i \geq l$. Badając inne rozwiązania możemy się ograniczyć do przypadku gdy pierwiastki wielomianu A są niezerowe. Jeśli $s \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu A to $y_i = s^i$ jest rozwiązaniem równania (1). y_i jest ograniczone dla $i \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $|s| \leq 1$. Jeśli $s \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu A o krotności co najmniej l to $y_i = i^l s^i$ jest też rozwiązaniem równania (1). To rozwiązanie jest ograniczone $i \geq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $|s| < 1$ lub $l = 0$ i

$|s| = 1$. A więc jeśli wszystkie rozwiązanie równania (1) pozostają ograniczone dla $i \geq 0$ to pierwiastki wielomianu $A(s)$ są zawarte w dysku $|s| \leq 1$ i pierwiastki o module 1 są pojedyncze.

Aby pokazać implikację przeciwną zauważmy że rozwiązania równania (1) tworzą przestrzeń liniową i rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczone przez $k + 1$ warunków początkowych y_0, \dots, y_k i że każde warunki początkowe dają rozwiązanie. A więc przestrzeń rozwiązań ma wymiar $k + 1$. Mamy $k + 1 - l$ rozwiązań postaci $y_i = i^l s^i$ dla s niezerowego i l rozwiązań takich że $y_i = 0$ dla $i \geq l$ gdzie 0 jest pierwiastkiem krotności l dla $A(s)$ i jak łatwo sprawdzić są one liniowo niezależne, a więc dają bazę przestrzeni rozwiązań. Ale gdy pierwiastki wielomianu $A(s)$ są zawarte w dysku $|s| \leq 1$ i pierwiastki o module 1 są pojedyncze to rozwiązania bazowe pozostają ograniczone dla $i \geq 0$, więc każde rozwiązanie pozostaje ograniczone dla $i \geq 0$. \square

Przykład: Jeśli $a_0 = 1$ i $a_j = 0$ dla $j > 0$ to mamy

$$A(s) = s^{k+1} - s^k = (s - 1)s^k$$

czyli $s = 1$ jest pierwiastkiem krotności 1, zaś $s = 0$ jest pierwiastkiem krotności k . W szczególności metody z takim a są stabilne. A więc metoda Eulera czy jawna metoda Adamsa z poprzedniego przykładu są stabilne.

Przykład: Jeśli $k = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = -1$ to odpowiednia metoda jest niestabilna. Minowicie

$$A(s) = s^2 - 2s + 1 = (s - 1)^2$$

czyli 1 jest pierwiastkiem podwójnym.

Naturalne jest pytanie o istnienie stabilnych metod wysokiego rzędu.

Lemat 1.2 (*Bariera Dahlquist*) Jeśli metoda z $k > 0$ jest stabilna i ma rząd l to

- dla nieparzystego k zachodzi $l \leq k + 3$,
- dla parzystego k zachodzi $l \leq k + 2$,
- $l \leq k + 1$ o ile $b_{-1} \leq 0$

W szczególności dla metody jawnej $l \leq k + 1$.

Komentarz: Jawna metoda Adamsa z $k = 3$ jest rzędu 4. Z lematu wyżej wynika że nie ma metod jawnych wyższego rzędu z $k = 3$.

Lemat 1.3 Stabilna metoda różnicowa rzędu $k+3$ jest symetryczna, tzn. sztucznie przyjmując $a_{-1} = -1$ dla $j = -1, 0, \dots, k$ mamy

$$b_j = b_{k-j-1},$$

$$a_j = -a_{k-j-1}.$$

Komentarz: Warunek stabilności jest mocno nieliniowy. Powyższy lemat przy poszukiwaniu metod maksymalnego rzędu pozwala wykluczyć znaczną część metod niestabilnych warunkami liniowymi.

Komentarz: Warunek symetrii powoduje że warunki na rząd stają się częściowo nadmiarowe.

Lemat 1.4 *Jeśli wielomian $A = \sum_{j=-1}^k s^{k-j} a_j$ jest antysymetryczny, tzn. $a_j = -a_{k-j-1}$ i $a_{-1} = -1$ to $A(0) \neq 0$, zaś jeśli $A(s) = 0$, to $A(s^{-1}) = 0$.*

Dowód: Współczynnik przy s^0 to $a_k = -a_{k-k-1} = -a_{-1} = 1$, czyli $A(0) = 1 \neq 0$. Dla $s \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned} 0 = s^{-k-1} A(s) &= \sum_{j=-1}^k s^{-j-1} a_j = - \sum_{j=-1}^k s^{-(j+1)} a_{k-j-1} \\ &= - \sum_{j=-1}^k s^{-(k-j)} a_j = -A(s^{-1}). \end{aligned}$$

□

Wynika stąd że stabilny i antysymetryczny A ma wszystkie pierwiastki o module równym 1. Ponadto, poza ewentualnie $s = 1$ i $s = -1$ pierwiastki układają się w pary s, s^{-1} . Warunek na dodatni rząd wymaga by $A(1) = 0$. Dla parzystego k oznacza to że $s = -1$ nie może być pierwiastkiem, zaś dla nieparzystego k $s = -1$ musi być pierwiastkiem, bo w przeciwnym razie dla jednego $s \notin \{1, -1\}$ zabrakłoby pierwiastka do pary.

Fakt: Mając dane współczynniki a_j , $j = -1, \dots, k$ z $a_{-1} = 1$ możemy znaleźć dokładnie jeden zestaw b_j , $j = -1, \dots, k$, taki że metoda różnicowa z tymi a i b jest rzędu co najmniej $k + 2$. b można znaleźć rozwiązując układ równań liniowych na rząd. Jeśli a jest antysymetryczne, to otrzymane b jest symetryczne. Jeśli k jest nieparzyste i a jest antysymetryczne, to otrzymana metoda jest rzędu $k + 3$. Podobnie, można znaleźć zestaw b_j , $j = 0, \dots, k$ taki że jawna metoda różnicowa z tymi a i b jest rzędu co najmniej $k + 1$.

Ten fakt oznacza że stabilne metody różnicowe maksymalnego rzędu najłatwiej szukać najpierw wybierając stabilne a , a potem dobierając do niego b .

2 Metody predyktor-korektor

W tym podrozdziale rozważamy typową implementację metod niejawnych. Przypomnijmy sobie że dla metod niejawnych pojedynczy krok metody polega na rozwiązaniu równania które w ogólnym przypadku jest nieliniowe i wymaga rozwiązania przy pomocy metod iteracyjnych. Mianowicie, mamy

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^k a_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^k b_j z_{i-j}$$

$$= hb_{-1}F(x_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=0}^k a_j y_{i-j} + h \sum_{j=0}^k b_j z_{i-j}$$

gdzie w ostatniej linii wyrazy obu sum są znane, zaś jedyną wartością do wyznaczenia jest y_{i+1} . Powyższe równanie można zapisać jako

$$(2) \quad y_{i+1} = G(y_{i+1}) + s$$

gdzie s to suma znanych wyrazów zaś

$$G(y_{i+1}) = hb_{-1}F(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Do równania wyżej stosuje się klasyczny lemat o odwzorowaniach zwężających:

Lemat 2.1 *Jeśli $\lambda = \|G'\| < 1$ to dla dowolnego t_0 ciąg $t_{i+1} = G(t_i) + s$ jest zbieżny do rozwiązania równania*

$$t = G(t) + s.$$

Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie t_∞ i przy tym

$$\|t_i - t_\infty\| \leq \lambda^i \|t_0 - t_\infty\|,$$

$$\|t_i - t_\infty\| \leq \frac{\lambda^i}{1 - \lambda} \|t_0 - t_1\|.$$

Dowód. Mamy

$$G(t_1) + s - (G(t_2) + s) = G(t_1) - G(t_2)$$

czyli

$$\|(G(t_1) + s) - (G(t_2) + s)\| \leq \|G'\| \|t_1 - t_2\| = \lambda \|t_1 - t_2\|$$

czyli odwzorowanie $t \mapsto G(t) + s$ jest zwężające. Teraz zbieżność i istnienie to klasyczny wynik. Oszacowanie można pokazać następująco:

$$t_{i+1} - t_\infty = G(t_i) + s - (G(t_\infty) + s)$$

czyli

$$\|t_{i+1} - t_\infty\| \leq \lambda \|t_i - t_\infty\|$$

co przez indukcję daje pierwsze oszacowanie. Pierwsze oszacowanie dla $i = 1$ daje

$$\|t_1 - t_\infty\| \leq \lambda \|t_0 - t_\infty\|$$

co używając nierówności trójkąta daje

$$\|t_0 - t_\infty\| \leq \|t_0 - t_1\| + \|t_1 - t_\infty\| \leq \|t_0 - t_1\| + \lambda \|t_0 - t_\infty\|$$

czyli

$$(1 - \lambda) \|t_0 - t_\infty\| \leq \|t_0 - t_1\|$$

co daje drugą nierówność. □

Z lematu 2.1 wynika że jeśli λ jest dużo mniejsze niż 1 to już jedna iteracja punktu stałego znacznie poprawia dokładność rozwiązania. Oznacza to że jeśli pierwsze przybliżenie jest w miarę dobre to jedna iteracja może wystarczyć. Oczywiście, pojawia się problem jak wybrać dobre przybliżenie początkowe. W metodach predyktor-korektor jako przybliżenie początkowe wybieramy metodę jawną tego samego rzędu lub częściej rzędu o jeden mniejszego jak metoda niejawna. W takim schemacie metodę jawną nazywamy predyktorem zaś niejawną korektorem. Istotne tu jest że metoda niejawna decyduje o stabilności i dokładności. Dlatego jako korektor musimy wybierać metodę stabilną. Natomiast jako predyktor można wybrać metodę niestabilną (jednak jawna metoda stabilna może dać lepszy wynik). Zwykle już pojedyncze użycie korektora powoduje że cały schemat jest stabilny. Żeby to lepiej zrozumieć dobrze jest podzielić błąd na dwie składowe: błąd wprowadzany w danym kroku i błąd przenoszony. Błąd w wprowadzany w kroku i to błąd metody przy wyliczaniu y_{i+1} z $u(x_{i-j})$, $j = 0, \dots, k$ gdzie u jest dokładnym rozwiązaniem. Błąd przenoszony to różnica między błędem przy użyciu przybliżonych y_{i-j} a błędem gdy użyjemy dokładne $u(x_{i-j})$. Jak się okaże w trakcie obliczeń błąd przenoszony jest zwykle znacznie większy od błędu wprowadzanego w danym kroku. Zakładając że metoda jest co najmniej rzędu 1 i przy rozsądnych założeniach o regularności F można pokazać że błąd przenoszony to

$$\sum_{j=0}^k a_j (y_{i+1} - u(x_{i-j})) + O(h \sum_{j=0}^k (\|y_{i+1}\| + \|u(x_{i-j})\|)).$$

Zakładając że rozwiązanie pozostaje w obszarze gdzie y_i i u są ograniczone drugi człon to po prostu $O(h)$. Pokażemy później że człon $O(h)$ nie zmienia tego czy metoda jest stabilna czy nie. Gdybyśmy użyli tylko predyktora to a_j we wzorze wyżej byłyby z metody jawnej. Jeśli po użyciu korektora mamy odległość od punktu stałego rzędu co najwyżej $O(h)$ to można brać a_j z korektora i włączyć błąd spowodowany przybliżonym rozwiązaniem równania (2) do członu $O(h)$, czyli metoda będzie stabilna.

W praktyce interesuje nas minimalizacja błędu metody. Jawna metoda różnicowa zwykle ma stałą błędu większą od stałej w metodzie niejawnej. Błąd spowodowany przybliżonym rozwiązaniem równania (2) efektywnie dodaje się do błędu metody. Jak powiedzieliśmy istotną częścią błędu pierwszego przybliżenia jest błąd przenoszony, dokładniej różnica między błędem przenoszonym metody jawnej a błędem przenoszonym metody niejawnej. Dlatego czynnik λ powinien być dostatecznie mały a ilość iteracji dostatecznie duża by zmniejszyć błąd rozwiązania (2) do podobnego rzędu jak błąd metody. Jeśli λ jest podobnego rzędu jak h , to można jako predyktor użyć metodę rzędu o jeden mniejszego niż rząd korektora.

Zwykle głównym kosztem jest obliczanie funkcji F . Przy jednej iteracji korektora potrzebujemy dwa obliczenia F na krok. Przy trzech iteracjach po-

trzebujemy obliczać F cztery razy na krok metody różnicowej. Zauważmy że zmniejszenie kroku do połowy podwaja koszt obliczania F , czyli jedna iteracja korektora z krokiem $h/2$ kosztuje w przybliżeniu tyle samo co trzy iteracje korektora przy kroku h . A więc jeśli λ jest stosunkowo duże ($> \frac{1}{2}$) to ma sens zmniejszenie kroku, bo wtedy λ się zmniejszy i wystarczy mniej iteracji. Jeśli potrzebna jest duża dokładność to wtedy krok będzie mały i oczekujemy małego λ . Jeśli nie wiemy czy ustalona liczba iteracji wystarczy to o ile λ ma rozsądne oszacowanie z góry (np. $\lambda \leq \frac{1}{2}$) na mocy Lematu 2.1 możemy oszacować błąd rozwiązania (2) przez różnicę dwu przybliżeń.

Ze względu na błąd przenoszony w przypadku gdy λ nie jest bardzo małe dobrze jest użyć metodę stabilną jako predyktor. Mianowicie, niestabilny predyktor wymaga wtedy większej ilości iteracji metody punktu stałego by osiągnąć pełną dokładność. Przy mniejszej ilości iteracji błąd będzie zdominowany przez błąd rozwiązania równania (2), czyli efektywnie dostaniemy metodę niższego rzędu. Stosując zamiast tego stabilny predyktor zmniejszamy wpływ błędu przenoszonego.

Alternatywą dla metody punktu stałego jest użycie metody Newtona. Jest to jedyna możliwość gdy λ jest dużo większe niż 1, tzn. gdy $\|G'\|$ jest duże i nie chcemy zmniejszać kroku (dotyczy to tzw. problemów sztywnych). Jednakże dla równań wielowymiarowych (gdy m jest duże) obliczanie G' i rozwiązanie układu liniowego potrzebnego w metodzie Newtona może być kosztowne, toteż gdy λ jest małe to metoda punktu stałego często jest tańsza. Kompromisem może być wyłączenie stałego czynnika liniowego L z G , tzn. gdy $G = L + \tilde{G}$ to (2) jest równoważne z

$$(I - L)y_{i+1} = \tilde{G}(y_{i+1}) + s$$

i użycie iteracji punktu stałego bazując na raz obliczonej odwrotności $1 - L$ czy faktoryzacji $1 - L$. Jeśli norma $(I - L)^{-1}$ nie jest zbyt duża, a $\|\tilde{G}'\|$ jest dużo mniejsza niż $\|G\|$ to takie podejście może znacznie zmniejszyć koszt obliczeń.

Przykład: Często są stosowane metody Adamsa z $k = 2$. Jawna metoda ma współczynniki $a_0 = 1, a_j = 0$ dla $j > 0, b_0 = \frac{23}{12}, b_1 = -\frac{16}{12}, b_2 = \frac{5}{12}$. Niejawna ma współczynniki $a_0 = 1, a_j = 0$ dla $j > 0, b_{-1} = \frac{9}{24}, b_0 = \frac{19}{24}, b_1 = \frac{-5}{24}, b_2 = \frac{1}{24}$.

Ogólniej, Metody Adamsa to metody gdzie $a_0 = 1, a_j = 0$ dla $j > 0$. Dla każdego k istnieje jawna metoda Adamsa rzędu $k+1$ i niejawna metoda Adamsa rzędu $k+2$.

3 Zagadnienia praktyczne

3.1 Wartości początkowe

Metody z $k > 0$ wymagają dodatkowych wartości początkowych. Jednym sposobem wyliczenia tych wartości jest użycie metod Rungego-Kutty (o których będziemy mówili później). Inna możliwość to użycie metody z $k = 0$ i małym krokiem do wyliczenia wartości w punktach początkowych. Wariantem jest uży-

cie metody ze zmiennym rzędem i krokiem startując bardzo małym krokiem i rzędem 0.

3.2 Szacowanie błędu

Dla konkretnej metody często daje się oszacować błąd, a dokładniej jego wielkość bazując na wynikach pośrednich danej metody. Szacowanie błędu wykrywa sytuacje gdy ma sens zmiana kroku lub zmiana metody na metodę innego rzędu.

3.3 Zmiana kroku

Zależnie od własności funkcji F różne wielkości kroku dają lepsze lub gorsze wyniki: zbyt duży krok nie pozwala uzyskać oczekiwanej dokładności, zbyt mały marnuje obliczenia. Dzięki szacowaniu błędu można takie sytuacje wykryć. Zmiana kroku wymaga pewnego wysiłku. Ze względu na użycie równoodległych punktów typowe przypadki to podwajanie kroku lub zmniejszenie kroku o połowę. Podwojenie kroku zwykle jest łatwe bo wystarczy pominięcie co drugiego punktu. Zmniejszenie kroku jest bardziej kłopotliwe. Prosta możliwość to użycie interpolacji. Bardziej ogólna to metoda która w trakcie zmiany kroku używa punktów które nie są równoodległe. Najprostszy przypadek to gdy pierwsze kilka punktów ma krok h a kolejne krok $h/2$. Nasze wyprowadzenie rzędu metody daje się łatwo uogólnić na ten przypadek. Stabilność staje się skomplikowanym problemem, ale dla metod typu Adamsa, tzn. gdy używamy tylko poprzednie y_i nie ma problemu ze stabilnością. Metody Adamsa ze zmiennym krokiem można łatwo wyznaczyć rozwiązując równania liniowe, przy tym potrzebny zakres wartości można stabilizować, więc nie wprowadzają dodatkowych narzutów w trakcie wykonania. W zasadzie dla metod Adamsa można by dopuścić bardziej skomplikowaną zmianę kroku, znane są wzory pozwalające na prostsze od rozwiązywania równań liniowych wyznaczenie potrzebnych współczynników.

3.4 Zmiana rzędu

Tak jak zmiana kroku ma też sens zmiana rzędu: dla regularnych F duży rząd i mały krok da dobry wynik mniejszym kosztem niż metoda niższego rzędu. Dla mniej regularnych F niższy rząd może pozwolić na mniejszy koszt obliczeń. Znowu, przy zmianie metody ogólnie problem stabilności staje się skomplikowany. Jednakże dla metod Adamsa nie ma problemu, przy dowolnym rzędzie są stabilne (nawet jak zmieniamy rząd z kroku na krok).

4 Problemy sztywne

Najprostszy przykład: $y' = -200y$. Rozwiązanie ogólne ma postać $C \exp(-200x)$. Niezerowe rozwiązania szybko się zmieniają i dążą do 0 gdy t dąży do ∞ . Rozwiązanie zerowe jest regularne i asymptotycznie stabilne. Jednakże metody numeryczne mogą się źle zachowywać: stała Lipschitza wynosi 200 co oznacza że

potrzebujemy krok rzędu $1/200$, przy większym kroku rozwiązanie numeryczne nie będzie stabilne.

Można argumentować że równanie wyżej jest niezbyt interesujące, widać że przy zerowym warunku początkowym dokładne rozwiązanie jest równe zero bez potrzeby numerycznego rozwiązywania równania. Jednakże, suma $z = y + \cos(x)$ spełnia równanie $(z - \cos(x))' = -200(z - \cos(x))$ którego rozwiązanie jest już niezerowe. Wariant $y' = -200(y - \cos(x))$ ma bardzo podobne zachowanie. To ostatnie równanie dalej łatwo rozróżnić jawnie (metodą wariacji stałych), ale już nie jest tak trywialne jak poprzednie.

Łatwo wyprodukować wielowymiarowy wariant przykładu wyżej: jeśli A jest dużą macierzą o dodatnio określonej części symetrycznej (hermitowskiej) to równanie $y' = -Ay$ ma podobny charakter do jednowymiarowego równania wyżej, lecz zachowanie niezerowych trajektorii może być bardziej skomplikowane. Równania typu $(z - f(x))' = -A(z - f(x))$ mają niezerowe rozwiązanie f . Dodając człon zaburzający mamy równania typu $y' = -A(y - f(x)) + g(x)$.

Ogólniej, jeśli A wyżej zastąpimy przez odwzorowanie nieliniowe, tzn. $y' = -A(y, x)$ gdzie pochodna A po y jest duża i dodatnio określona to dostaniemy znacznie bardziej skomplikowane zachowanie. Jednakże, jeśli równanie $A(y, x) = 0$ ma rozwiązanie dla każdego x i to y jest regularne to rozwiązania równania wyżej będą bliskie y i też będą regularne.

Można by wątpić czy podobne równania pojawiają się w praktyce. Jednakże są naturalne powody by takie równania się pojawiły. Mianowicie, przykłady wyżej można interpretować jako dążenie układu do stanu równowagi. Uproszczone modele zjawisk fizycznych często zakładają że układ jest w stanie równowagi, ale dokładniejszy model powinien uwzględniać to że osiągnięcie równowagi wymaga niezerowego czasu i przy zmieniającym się zaburzeniu układ będzie się nieco odchyłał od równowagi.

W wielu zjawiskach fizycznych różne czynniki zmieniają się z różnymi prędkościami, przy mocno różnych prędkościach daje to podobne problemy jak równania wyżej: aby zobaczyć zjawisko musimy równanie rozwiązywać w czasie odpowiednim dla małej prędkości. Wtedy człony odpowiadające za dużą prędkość dają duże pochodne F .

Dla problemów sztywnych należy stosować specjalne metody. Jeśli używa się standardowych metod, to problemy sztywne wymagają bardzo małego kroku.

4.1 A-stabilność

Jednym kryterium przydatności metod dla problemów sztywnych jest tzw. A-stabilność. Dokładniej, testujemy metodę na równaniu

$$y' = \lambda y.$$

A-stabilność wymaga by rozwiązania powyższego równania były ograniczone dla dowolnego λ z $\Re(\lambda) \leq 0$.

Uwaga: wyżej λ może być zespolone. Mianowicie, badając układy równań liniowych z rzeczywistą macierzą możemy dostać zespolone wartości własne.

Diagonalizacja na liczbami zespolonymi da nam wtedy równania z zespolonym λ . A więc jak chcemy by wynik dla pojedynczego równania mówił nam coś o układach równań to chcemy rozważać zespolone λ .

Dla wielopunktowej metody różnicowej w postaci ogólnej:

$$\sum_{j=-1}^k a_j y_{n-j} = h \sum_{j=-1}^k b_j z_{n-j}$$

z $a_{-1} = 1$ po podstawieniu $z_{n+j} = \lambda y_j$ dostajemy

$$\sum_{j=-1}^k (a_j - h\lambda b_j) y_{n-j} = 0$$

co oznaczając $\mu = h\lambda$ można zapisać jako

$$\sum_{j=-1}^k (a_j - \mu b_j) y_{n-j} = 0.$$

A-stabilność wymaga by rozwiązania powyższego równania były ograniczone dla dowolnego μ takiego że $\Re(\mu) \leq 0$.

Uwaga: Zwykła stabilność to ten sam warunek, ale z $\mu = 0$.

Dla wielopunktowych metod różnicowych pokazano że maksymalny rząd metody A-stabilnej to 2, przy tym metoda A-stabilna musi to być niejawna.

To ostatnie łatwo uzasadnić. Mianowicie, tworzymy wielomian

$$P_\mu(s) = \sum_{j=-1}^k (a_j - \mu b_j) s^{k-1}.$$

A-stabilność wymaga by pierwiastki wielomianu P_μ były co do modułu ograniczone przez 1 dla dowolnego μ . Jednakże, dla metody jawnej współczynnik P_μ przy najwyższej potędze to 1, a więc A-stabilność implikuje że współczynniki P_μ są ograniczone. Jednak widać że to nie jest prawdą, czyli nie ma jawnych A-stabilnych metod różnicowych.