

Więcej o metodach rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

W. Hebisch.

13 kwietnia 2022

1 Metody Rungego-Kutty

Metody Rungego-Kutty pozwalają osiągnąć wyższy rząd bez potrzeby dodatkowych wartości początkowych. Innymi słowy, są samostartujące. Mając dane x_0 , y_0 i h bez dodatkowych danych możemy obliczyć $k_0 = z_0 = F(x_0, y_0)$. Na pierwszy rzut oka jedyną rzecz którą teraz można zrobić to użycie metody Eulera do przybliżonego obliczenia y_1 , tzn. przybliżonego rozwiązania w punkcie $x_1 = x_0 + h$. Ale by uzyskać metodę wyższego rzędu musimy zrobić coś innego. Pomysł Rungego i Kutty polega na tym że obliczamy przybliżone wartości w punktach pośrednich $t_j = x_0 + hc_j$. Te wartości używamy w obliczeniach pośrednich a potem pomijamy, więc interesuje nas tylko dokładność w punkcie końcowym. Dokładniej, wartość w punkcie t_1 przybliżamy metodą w stylu Eulera, biorąc $y_0 + ha_{1,0}k_0$ i dostając wartość pochodnej $k_1 = F(t_1, y_0 + ha_{1,0}k_0)$. W kolejnym punkcie mamy do dyspozycji k_0 i k_1 i możemy użyć ich kombinację liniową. Ogólniej mamy schemat rekurencyjny:

$$k_j = F(t_j, y_0 + h(a_{j,0}k_0 + a_{j,1}k_1 + \dots + a_{j,j-1}k_{j-1}))$$

pozwalający wyliczać k_j w terminach poprzednich wartości. W ostatnim kroku chcemy wyliczyć wartość w $x_1 = x_0 + h$, wtedy odpowiednie k_j jest niepotrzebne. Dlatego wzór zapisujemy w nieco innej postaci

$$y_1 = y_0 + h(b_0k_0 + b_1k_1 + \dots + b_s k_s)$$

gdzie s to numer ostatniego kroku pośredniego. Naturalnie, pojawia się pytanie czy w ten sposób daje się uzyskać metodę wyższego rzędu niż 1? Po pierwsze, jeśli $s = 0$ to dostajemy jawną metodę różnicową z $k = 0$ o których wiemy że są co najwyżej rzędu 1. A więc by dostać coś nowego potrzebujemy $s > 0$. Dla niejawniej metody różnicowej z $k = 0$ jedną z możliwości była iteracja punktu stałego. Stosując jedną iterację dostaniemy wtedy metodę która zgadza się z definicją metody Rungego-Kutty dla $s = 1$ i $c_1 = 1$. Jednakże schemat Rungego-Kutty jest dużo ogólniejszy.

Tak jak w przypadku wielopunktowych metod różnicowych koniecznym warunkiem na rząd l jest by uzyskać odpowiednią dokładność na wielomianach,

tn. w przypadku gdy $F(x, y) = P'(x)$ zaś P jest wielomianem stopnia l powinniśmy dostać dokładną równość:

$$y_1 = P(x_1) + O(h^{l+1}).$$

Niestety, taki warunek nie wystarcza: nasze F nie zależy od y i w efekcie dostaniemy równanie wiążące c_j z b_l , ale nie dostaniemy równań na $a_{j,m}$. Dlatego trzeba rozważać ogólniejszy przypadek, mianowicie taki gdy F jest wielomianem stopnia co najwyżej l . Naiwne rozpisanie warunków prowadzi do nieliniowego układu równań wielomianowych który nawet w najprostszych przypadkach jest nieprzejrzysty i trudny do rozwiązania. Zwykle wprowadza się dodatkowe warunki liniowe, np. by wszystkie k_i były przybliżeniami rzędu co najmniej 1. Obecnie jest znana dość obszerna teoria pozwalająca zapisać warunki na rząd metody w nieco prostszej postaci. Niestety, nawet po tym dla wyższych rzędów warunki są bardzo trudne do analizy. Dlatego nie będziemy tu badać tych warunków a ograniczymy się do podania bez dowodu kilku znanych wyników o istnieniu lub braku istnienia metod typu Rungego-Kutty z danym s i zadanym rzędem l . Dodajmy że dla wysokich rzędów pozostaje otwarte pytanie jak duży rząd daje się uzyskać przy danym s .

Lemat 1.1 *Metoda Rungego-Kutty rzędu l wymaga $s \geq l - 1$. Dla $l \geq 5$ trzeba $s \geq l$, dla $l \geq 7$ trzeba $s \geq l + 1$.*

Przykład: Biorąc $s = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $a_{1,0} = \frac{1}{2}$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ mamy wzór

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_0)$$

z $k_0 = F(x_i, y_i)$ który jest rzędu 2.

Metody Rungego-Kutty często podaje się w postaci tabelki gdzie wiersze opisują poszczególne kroki. Z lewej strony są wartości c_j , potem $a_{j,m}$. Ostatni wiersz podaje b_j i omija c . Wartości c oddziela się od reszty kreską pionową, ostatni wiersz oddziela się od reszty kreską poziomą. W takiej postaci metodę z poprzedniego przykładu zapisuje się jako

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Przykład: Klasyczna metoda rzędu 4 ma $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $a_{1,0} = \frac{1}{2}$, $a_{2,0} = 0$, $a_{2,1} = \frac{1}{2}$, $a_{3,0} = a_{3,1} = 0$, $a_{3,2} = 1$, $b_0 = \frac{1}{6}$, $b_1 = \frac{2}{6}$, $b_2 = \frac{2}{6}$, $b_3 = \frac{1}{6}$. Jako wzory:

$$\begin{aligned} k_0 &= F(x_i, y_i), \\ k_1 &= F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_0) \\ k_2 &= F(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1) \end{aligned}$$

$$k_3 = F(x_i, y_i + hk_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}hk_0 + \frac{2}{6}hk_1 + \frac{2}{6}hk_2 + \frac{1}{6}hk_3.$$

W postaci tabelki:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	2/6	2/6	1/6

Z metod wyższego rzędu często stosowana jest metoda rzędu 5 Dormanda-Princa z $s = 6$ ($s = 5$ wystarcza dla rzędu 5, ale wzory Dormanda-Princa mają dobre zachowanie i pozwalają na szacowanie błędu). Znane są metody dowolnie wysokiego rzędu, ale dla znanych metod s rośnie dość szybko z rzędem.

1.1 Niejawne metody Rungego-Kutty

Ogólniejsze metody otrzymamy pozwalając by w schemacie Rungego-Kutty wartości k_j były wyznaczone niejawnie przez rozwiązanie układu równań. Takie metody są przydatne przy rozwiązywaniu tzw. problemów sztywnych i przy ekstrapolacji.

2 Metody ekstrapolacyjne

W wielu problemach numerycznych błąd daje się wyrazić jak szereg potęgowy parametru, np. kroku. Ekstrapolacja (często nazywana ekstrapolacją Richardsona) tworzy kombinację rozwiązań przybliżonych z różnymi wartościami parametru, tak by wyrazy z niskimi potęgami parametru się skasowały. Przy całkowaniu numerycznym metoda Romberga jest przykładem użycia ekstrapolacji. Przy przybliżonym rozwiązywaniu równań różniczkowych naturalnym parametrem jest krok h . Niektóre metody są wystarczająco symetryczne by błąd był szeregiem od h^2 , tzn. współczynniki przy nieparzystych potęgach h znikają. Np. niejawna metoda zadana wzorem

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(x_i, y_i) + F(x_i + h, y_{i+1}))$$

ma tą własność. Dla takich metod ekstrapolacja jest prostsza niż dla metod niesymetrycznych.

Symetryczna ekstrapolacja jest podstawą metody Bulirsch-Stoera i wariantu podanego przez Deuffharda. Dokładniej Bulirsch-Stoer zaproponowali metodę z użyciem $h_j = \frac{h}{n_j}$ z $n_j = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, \dots$ gdzie na przemian pojawiają się potęgi 2 i potęgi 2 pomnożone przez 3. Deuffhard zaproponował $n_j = 1, 2, 3, \dots$ i doświadczalnie pokazał że daje to większą wydajność. Przy ekstrapolacji trzeba zwracać uwagę na błędy zaokrągleń, szczególnie w wariacie Deuffharda. Jednakże dla regularnych problemów przy dostatecznej dokładności arytmetyki daje się uzyskać bardzo dużą dokładność rozwiązania.

3 Problemy sztywne i A-stabilność

Przypomnijmy że jednym kryterium przydatności metod dla problemów sztywnych jest tzw. A-stabilność. Dokładniej, testujemy metodę na równaniu

$$y' = \lambda y.$$

A-stabilność wymaga by rozwiązania powyższego równania były ograniczone dla dowolnego λ z $\Re(\lambda) \leq 0$.

Uwaga: wyżej λ może być zespolone.

Dla wielopunktowych metod różnicowych pokazano że maksymalny rząd metody A-stabilnej to 2, przy tym metoda A-stabilna musi to być niejawną.

Przypomnijmy że dla wielopunktowej metody różnicowej w postaci ogólnej:

$$\sum_{j=-1}^k a_j y_{n-j} = h \sum_{j=-1}^k b_j z_{n-j}$$

z $a_{-1} = 1$ po podstawieniu $z_{n+j} = \lambda y_j$ dostajemy

$$\sum_{j=-1}^k (a_j - h\lambda b_j) y_{n-j} = 0$$

co oznaczając $\mu = h\lambda$ można zapisać jako

$$\sum_{j=-1}^k (a_j - \mu b_j) y_{n-j} = 0.$$

A-stabilność wymaga by rozwiązania powyższego równania były ograniczone dla dowolnego μ takiego że $\Re(\mu) \leq 0$.

A-stabilność badamy tworząc wielomian

$$P_\mu(s) = \sum_{j=-1}^k (a_j - \mu b_j) s^{k-1}.$$

A-stabilność wymaga by pierwiastki wielomianu P_μ były co do modułu ograniczone przez 1 dla dowolnego μ .

Dla niejawną metody Eulera mamy $a_{-1} = 1$, $a_0 = -1$, $b_{-1} = b_0 = 1/2$.
czyli

$$P_\mu(s) = (1 - \mu/2)s + (-1 - \mu/2).$$

A więc $P_\mu(s) = 0$ oznacza że

$$s = \frac{-2 - \mu}{2 - \mu}$$

Widać że $2 - \mu$ ma tą samą część urojoną jak $-2 - \mu$, zaś $\Re(\mu) \leq 0$ implikuje że część rzeczywista $2 - \mu$ jest większa niż część rzeczywista $-2 - \mu$. A więc

$|-2-\mu| < |2-\mu|$ co daje $|s| < 1$. A więc niejawna metoda Eulera jest A-stabilna (i rzędu 2).

Zachowanie metody można sobie lepiej wyobrazić startując z $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$. Wtedy obliczone $y_k = s^k$, zaś dokładna wartość to $\exp(\mu k)$. Dla dużego $|\mu|$ wartość s będzie bliska 1, czyli rozwiązanie dokładne bardzo szybko maleje, zaś rozwiązanie numeryczne maleje bardzo powoli. Oczywiście gdybyśmy naprawdę chcieli rozwiązać równanie $y' = \lambda y$ nie było by to zadowalające, bo jest spora odległość między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym. Jednakże w praktyce często składowe odpowiadające $y' = \lambda y$ są małą częścią rozwiązania i w zupełności nam wystarcza że są ograniczone. Chodzi o to żeby takie składowe nie zaczęły narastać co by zepsuło rozwiązanie. Takie narastanie widać dla jawnej metody Eulera. Przy kroku 1 i $\lambda = -3$ (czyli $\mu = -3$) numerycznie $y_k = (-2)^k$, co oznacza katastrofalne narastanie błędu. Nasza analiza z poprzedniego wykładu pokazuje że takie narastanie błędu jest możliwe dla dowolnej jawnej metody różnicowej (choć są metody które zachowują się dobrze dla rzeczywitych λ).

Dla metod Rungego-Kutty dostajemy trochę inne kryterium A-stabilności. Znowu dla metod jawnych daje się pokazać że nie są one A-stabilne. Natomiast istnieją niejawne A-stabilne metody Rungego-Kutty wyższego rzędu. Dokładniej rozpatrujemy metody postaci

$$k_j = F(t_j, y_0 + h(a_{j,0}k_0 + \dots + a_{j,s}k_s))$$

$$y_1 = y_1 = y_0 + h(b_0k_0 + b_1k_1 + \dots + b_s k_s)$$

gdzie $t_j = x_0 + c_j h$. Wyznaczenie k_j wymaga to rozwiązania układu równań co jest dość kłopotliwe. Konkretna metoda jest wyznaczona przez podanie współczynników c_j , $a_{j,l}$ i b_j . Tak jak w przypadku metod jawnych używa się do tego tabelki jak np.

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

Powyższa tabelka opisuje metodę Radau IIA rzędu 3 która jest A-stabilna.

4 Zagadnienie brzegowe

W praktyce często trzeba rozwiązywać zagadnienia z warunkami brzegowymi, szczególnie dla równań rzędu 2. Prostą metodą jest tzw. metoda strzałów: rozwiązujemy zagadanie z warunkiem początkowym w jednym punkcie brzegowym otrzymując wartość w drugim punkcie. Następnie stosujemy wybraną metodę interakcyjną rozwiązywania równań by dobrać warunek początkowy tak by dał pożądaną wartość w drugim punkcie brzegowym.

5 Błąd metody Eulera

Rozwiązaniem równania $y' = y$ jest $\exp(x)$. \exp można wyliczać przy pomocy szeregu:

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + h^2/2 + h^3/6 + \dots$$

W jednym kroku metody Eulera rozwiązując w punkcie x_0 w wartością początkową y_0 i z krokiem h mamy

$$y_1 = y_0 + hy_0 = y_0(1 + h).$$

Dokładnym rozwiązaniem jest $y_0 \exp(h)$. Porównując widzimy że błąd w jednym kroku to

$$y_0(\exp(h) - (1 + h)) = y_0 \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \right) = y_0 \left(\frac{h^2}{2} + O(h^3) \right).$$

Błędy z poszczególnych kroków się dodają. Dla naszego równania łatwo to przeanalizować biorąc pod uwagę że błąd w kroku i mnoży wartość początkową dla kroku $i + 1$. Dokładniej, mamy

$$y_{i+1} = (1 + h)y_i = \exp(h)y_i(1 + h)\exp(-h) = \exp(h)y_i \left(1 - \frac{h^2}{2} + O(h^3) \right).$$

Indukcyjnie

$$y_{i+n} = \exp(kh)y_i \left(1 - \frac{h^2}{2} + O(h^3) \right)^n.$$

gdzie czynnik $O(h^3)$ jest jednostajny ze względu na n . W przykładzie mieliśmy $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = \frac{1}{n}$, czyli

$$y_n = \exp\left(n \frac{1}{n}\right) 1 \left(1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^n = \exp(1) \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Zakładając że krok jest dostatecznie mały, to błąd powinien być rzędu

$$-\frac{\exp(1)}{2n}$$

Poniżej pokazujemy wyniki dla metody Eulera przy różnej ilości kroków, w pierwszej kolumnie jest ilość kroków, w drugiej wynik, w trzeciej błąd, w czwartej powyższe oszacowanie błędu:

```
[10.0, 2.5937424601, - 0.124539368359045, - 0.13591409142295227]
[40.0, 2.6850638383899734, - 0.03321799006907167, - 0.03397852285573807]
[90.0, 2.703332461058197, - 0.014949367400848068, - 0.015101565713661362]
[160.0, 2.709835576307776, - 0.00844625215126893, - 0.008494630713934517]
[250.0, 2.712865123051453, - 0.005416705407592204, - 0.00543656365691809]
[360.0, 2.7145160248746873, - 0.003765803584357741, - 0.0037753914284153404]
```

[490.0, 2.715513250403912, - 0.0027685780551331973, - 0.002773756967815352]
 [640.0, 2.7161612079480073, - 0.002120620511037785, - 0.0021236576784836292]
 [810.0, 2.7166057733945723, - 0.00167605506447277, - 0.0016779517459623735]
 [1000.0, 2.716923932235896, - 0.0013578962231490799, - 0.0013591409142295226]

Widać że błąd jest bliski naszego oszacowania.

6 Stabilność i zbieżność metod różnicowych

Celem tego podrozdziału jest oszacowanie błędu który pojawi się po wykonaniu wielu kroków metody różnicowej. W szczególności, chcemy pokazać że stabilność rozumiana jako warunek na współczynniki a_j , $j = 0, \dots, k$ przy rozsądnych dodatkowych założeniach prowadzi do jednostajnego oszacowania na błąd, czyli innymi słowy implikuje brak fatalnej kumulacji błędów (stabilność). Ponadto przy kroku dążącym do 0 i wartościach początkowych zbiegających do dokładnego rozwiązania dla stabilnych metod dodatniego rzędu rozwiązanie przybliżone zbiega do rozwiązania dokładnego.

Jednakże za nim przejdziemy do głównego oszacowania potrzebujemy oszacowania dla pojedynczego kroku metody. Powiedzieliśmy że metoda jest rzędu l gdy

$$y_{k+1,h} - u(h(k+1) + x_0) = O(h^{l+1})$$

dla $y_{j,h} = u(x_0 + jh)$ i u będącego dokładnym rozwiązaniem. Jednakże, czynnik $O(h^{l+1})$ zależy od równania. My potrzebujemy mocniejsze, jednostajne oszacowanie. Mianowicie, mając równanie $y' = F(x, y)$ zakładamy że funkcja F jest wystarczająco regularna, tzn. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją taką że $\|\partial^\alpha F\| < M$ dla $|\alpha| \leq l$ (tzn. wszystkie pochodne cząstkowe F rzędu $\leq l$ są ograniczone przez M). To założenie jest niezbyt naturalne, bo implikuje że F jest ograniczone. Później powiemy jak to można osłabić, a na razie popatrzymy na konsekwencje. Mianowicie, warunek wyżej oznacza że istnieją stałe C i δ zależne tylko od M i metody takie że dla $0 < h < \delta$

$$(1) \quad \|y_{k+1,h} - u(h(k+1) + x_0)\| \leq Ch^{l+1}$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową na \mathbb{R}^m . W szczególności to oszacowanie jest jednostajne względem x_0 i y_0 . Nie będziemy tego szczegółowo dowodzić. Zauważmy tylko że F , y i u możemy przybliżać przy pomocy wielomianu Taylora stopnia l . Warunek na rząd oznacza że człony rozwinięcia stopnia mniejszego i równego l się skasują i zostaną tylko reszty. Zapisując wzór Taylora w postaci całkowitej widać że reszta to będzie h^{l+1} razy całki z wyrażeń zbudowanych z pochodnych F rzędu nie przekraczającego $l+1$. A więc skoro mamy z założenia oszacowanie na pochodne F to reszta we wzorze Taylora będzie ograniczona.

Lemat 6.1 *Jeśli stabilna metoda różnicowa jest rzędu l , zaś $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją jak wyżej to istnieją stałe C i δ taka że dla dowolnego x_0, u_0, h ,*

$0 < h \leq \delta$, y_0, y_1, \dots, y_k , $i \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\|y_{i+k} - u(x_{i+k})\| \leq C \exp(Cih) \left(\sum_{j=0}^k \|y_j - u(x_j)\| + ih^{l+1} \right)$$

gdzie u jest dokładnym rozwiązaniem równania $u' = F(x, u)$ z warunkiem początkowym $u(x_0) = u_0$, zaś x_i są rozwiązaniem przybliżonym otrzymanym przy pomocy naszej metody z krokiem h zakładając że każdym kroku obliczymy y_i z błędem nie przekraczającym L .

Dowód. Kłopot w dowodzie polega na tym że równanie różniczkowe które rozwiązujemy jest rzędu 1, zaś równanie różnicowe dające przybliżone rozwiązanie jest rzędu $k+1$. Tą trudność rozwiązujemy traktując $w_i = (y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}) \in \mathbb{R}^{m(k+1)}$ jako stan i rozważając równanie różnicowe rzędu 1 dla w_i .

Niech operator T będzie zdefiniowany wzorem

$$T(w_i) = T(y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}) = \left(\sum_{j=0}^k a_j y_{i-j}, y_i, \dots, y_{i-k+1} \right)$$

tzn. rozważamy tylko współczynniki a_j i zapisujemy działanie metody w terminach w_i . Zauważmy że istnieje norma na przestrzeni $\mathbb{R}^{m(k+1)}$ taka że

$$\|T(w)\| \leq \|w\|.$$

Mianowicie, stabilność metody oznacza że ciąg $T^i(w)$ jest ograniczony. Biorąc dowolną normę na $\|w\|_0$ na $\mathbb{R}^{m(k+1)}$ możemy zdefiniować

$$\|w\| = \sup_{i \geq 0} \|T^i(w)\|_0.$$

Niech $B(w_i) = (h \sum_{j=-1}^j b_j z_{i-j}, 0, \dots, 0)$ gdzie $z_i = F(x_i, y_i)$. Wtedy

$$w_{i+1} = T(w_i) + B(w_i).$$

Niech $v_i = (u(x_i), u(x_{i-1}), \dots, u(x_{i-k}))$ gdzie u jest dokładnym rozwiązaniem. Przy naszych założeniach, na mocy oszacowania (1) istnieje stała C_1 taka że

$$\|T(v_i) + B(v_i) - v_{i+1}\| \leq C_1 h^{l+1}$$

(stała może się zmienić bo mamy inną normę, ale jedyna niezerowa składowa wyżej to wyrażenie z (1)).

Zauważmy też że $\|F(x_i, y_i) - F(x_i, u(x_i))\|$ możemy szacować przy pomocy pochodnych

$$\|F(x_i, y_i) - F(x_i, u(x_i))\| \leq \|y_i - u(x_i)\| \sup \|\partial_y F(x_i, y)\| \leq C_2 \|y_i - u(x_i)\|.$$

Czyli mamy

$$\|B(w_i) - B(v_i)\| \leq C_3 h \|w_i - v_i\|.$$

Następnie

$$\begin{aligned} \|w_{i+1} - v_{i+1}\| &= \|T(w_i) + B(w_i) - v_{i+1}\| \\ &\leq \|T(w_i - v_i)\| + \|B(w_i) - B(v_i)\| + \|T(v_i) + B(v_i) - v_{i+1}\| \\ &\leq \|w_i - v_i\| + C_3 h \|w_i - v_i\| + C_1 h^{l+1}. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność i indukcja daje

$$\|w_{i+k} - v_{i+k}\| \leq (1 + C_3 h)^i \|w_k - v_k\| + C_1 h^{l+1} \sum_{j=0}^{i-1} (1 + C_3 h)^j.$$

Jednakże

$$\begin{aligned} (1 + C_3 h)^i &\leq \exp(C_3 i h), \\ \sum_{j=0}^{i-1} (1 + C_3 h)^j &\leq i \exp(C_3 i h) \end{aligned}$$

co daje

$$\|w_{i+k} - v_{i+k}\| \leq \exp(C_3 i h) (\|w_k - v_k\| + C_1 i h^{l+1}).$$

Oczywiści $\|w_{i+1} - v_{i+1}\|$ pozwala kosztem stałej moltiplikatywnej szacować $\|y_{i+1} - u_{i+1}\|$, zaś

$$\sum_{j=0}^k \|y_j - u(x_j)\|$$

kosztem stałej moltiplikatywnej szacuje $\|w_k - v_k\|$ co kończy dowód. \square

Komentarz: Jeśli F jest klasy C^l w otoczeniu U_0 dokładnego rozwiązania na odcinku $[x_0, x_0 + t]$, to w nieco mniejszym otoczeniu U_1 dokładnego rozwiązania pochodne F do rzędu l są ograniczone przez pewną stałą M_1 . Jeśli rozwiązanie przybliżone pozostaje w U_1 , to rozumowanie z Lematu 6.1 działa bez zmian. Jednakże dla dostatecznie małego h i danych początkowych dostatecznie bliskich dokładnego rozwiązania na mocy Lematu 6.1 rozwiązanie przybliżone będzie dowolnie bliskie rozwiązaniu dokładnego, a więc pozostanie w U_1 . Oznacza to że przy $h \rightarrow 0+$ i danych początkowych dążących do rozwiązania dokładnego rozwiązanie przybliżone będzie zbiegało do dokładnego.

Jak małe musi być h i jak dobre muszą być dane początkowe zależy w dość skomplikowany sposób od F , nie będziemy tu podawać żadnych ogólnych wyników. Ale dla konkretnych F jest łatwiej. W szczególności mając rozwiązanie przybliżone można oszacować pochodne F w otoczeniu U_2 rozwiązania przybliżonego (takie oszacowanie może być zgrubne) i pokazać że prawdziwe rozwiązanie jest blisko. Dokładniej, dzięki oszacowaniu F dokładne rozwiązanie starujące z $(x_0, y_0) \in U_2$ pozostanie przez pewien ograniczony z dołu czas t_0 w U_2 . Dzięki temu dla $x \in [x_0, x_0 + t_0]$ dostaniemy oszacowanie dla pochodnych F wzdłuż dokładnego rozwiązania co implikuje że dokładne rozwiązanie będzie bliskie przybliżonego. To z kolei pozwala pokazać że rozwiązanie dokładne w

od $x_0 + t_0$ do $x_0 + 2t_0$ pozostanie w U_2 . Indukcyjne pokaże to że rozwiązanie dokładne pozostaje w U_2 na całym interesującym nas przedziale x , co oznacza że na całym przedziale można będzie stosować oszacowanie z Lematu.

Komentarz. Aby uprościć dowód niektóre oszacowania w dowodzie są dość zgrubne. Dla konkretnej metody często daje się pokazać lepsze oszacowania. Np. jeśli $a_{-k} = 1$ a pozostałe $a_j = 0$ (tak jest w metodach Adamsa) to macierz T jest macierzą permutacji i dla zwykłej normy jest kontrakcją tzn. $\|T\| = 1$. W oszacowaniu dla B istotne są tylko pierwsze pochodne F , co może dać lepsze oszacowanie.

Komentarz. Jeśli zmienia się krok to mogą się też zmieniać z kroku na krok operatory T . Dowód działa o ile mamy wspólne ograniczenie dla produktów dowolnie wielu kolejnych T . Jeśli T są macierzami permutacji (czyli dla metod Adamsa) to produkty też są macierzami permutacji i mają normę równą 1. W ogólnym przypadku zwykle normy operatorów T mogą być większe niż 1 i produkty mogą być nieograniczone. Dlatego trzeba odpowiednio dobierać metodę.

7 Stabilność i zbieżność metod Rungego-Kutty

Dla metod Rungego-Kutty można podać podobny lemat jak Lemat 6.1. Ponieważ z wartości w x_i po kroku dostajemy wartość w x_{i+1} większa część dowodu dla metod różnicowych jest niepotrzebna. Oznaczmy przez $R(x_i, y_i)$ wartość produkowaną przez metodę z warunkiem początkowym w punkcie x_i równym y_i . Przy jednostajnym oszacowaniu pochodnych F można pokazać że dla dostatecznie małych h mamy

$$\|R(x_i, y) - R(x_i, z)\| \leq (1 + Ch)\|y - z\|.$$

Z warunku na rząd dostajemy

$$\|R(x_i, u_i) - u(x_{i+1})\| \leq C_1 h^{l+1}.$$

Łącznie

$$\begin{aligned} \|y_{i+1} - u(x_{i+1})\| &\leq \|R(x_i, y_i) - R(x_i, u_i)\| + \|R(x_i, u_i) - u(x_{i+1})\| \\ &\leq (1 + Ch)\|y_i - u(x_i)\| + C_1 h^{l+1}. \end{aligned}$$

Stąd wynika oszacowanie jak w Lemacie 6.1.

8 Błąd dla metod Rungego-Kutty

Dla metod Rungego-Kutty błąd popełniony w danym kroku można traktować jako zmianę warunków początkowych dla następnych kroków. To pozwala zastosować klasyczne twierdzenie o różniczkowaniu rozwiązań względem warunków początkowych. Dokładniej, niech $u_y(t)$ będzie rozwiązaniem równania $u' = F(t, u(t))$ z warunkiem początkowym $u(t_0) = y$. Oznaczmy przez

$z_y(t) = \partial_y u_y(t)$ i $w(t) = z_0(t)$. Wtedy w spełnia równanie liniowe

$$w'(t) = (\partial_y F)(t, u(t))w(t)$$

z warunkiem początkowym $w(t_0) = I$ (identyczność). Wracając do metody Rungego-Kutty, błąd popełniony dla t_0 będzie widoczny w $t_0 + h$ i powyższy wzór pozwala oszacować jego wpływ na rozwiązanie. Oczywiście pełny błąd jest sumą błędów z poszczególnych kroków. W granicy przy h dążącym do 0 dostaniemy całkę. Dla metody rzędu l będziemy mieli

$$R(x_i, u(x_i)) - u(x_{i+1}) = \phi(x_i)h^{l+1} + O(h^{l+2})$$

A więc asymptotycznie

$$y_n = u(x_0 + nh) + h^l \int_{x_0}^{x_0+nh} w(x)\phi(x)dx + O(h^{l+1}).$$

Bardziej skomplikowane rozwiązanie pozwala otrzymać rozwinięcie wyższego rzędu dla regularnych F . W ogólnym przypadku nie ma powodu by współczynniki przy potęgach wyższych niż h^l w rozwinięciu były zerowe. Jednakże istnieją metody takie że rozwinięci błędów zawiera tylko parzyste potęgi. Takie metody są przydatne do ekstrapolacji. Dokładniej, niech $y_h(x)$ oznacza rozwiązanie przybliżone z krokiem h w punkcie x . Wtedy można utworzyć kombinację liniową

$$\sum c_i y_{h_i}(x)$$

gdzie $h_i = d_i h$ dobierając współczynniki c_i i d_i tak by wyzerować w rozwinięciu błędów człony z potęgami h mniejszymi niż pewne wybrane N . Jeśli rozwinięcie błędów zawiera tylko parzyste potęgi, to krótsza kombinacja liniowa da wybrane N . Innymi słowy, łatwiej uzyskać duży rząd przy ekstrapolacji. Niezbyt fajne jest to że metody symetryczne są niejawnie. Mianowicie, podstawiając we wzorze $-h$ zamiast h , dostaniemy związek (równania) między y_{i-1} a y_i . Można to interpretować jako nową metodę (metodę sprzężoną) związaną z daną metodą. Dla symetrii metoda sprzężona ma być równoważna z oryginalną. Ale ta równoważność jest możliwa tylko dla metod niejawnych: jeśli oryginalna metoda była jawna to zależność między y_{i+1} a y_i nie ma jawnego rozwiązania gdy mamy dane y_{i+1} a szukamy y_i (a do tego się sprowadza metoda sprzężona).

9 Dalsze informacje

Dużo więcej o metodach Rungego-Kutty można przeczytać w książce [1] (uwaga: w [1] kroki liczy się od 1, toteż wartość s jest też większa o 1). Tam też dokładniej przedstawia się metody ekstrapolacyjne. Problemom sztywnym poświęcona jest książka [2]. Tam można też znaleźć A-stabilne metody Rungego-Kutty wyższych rzędów.

Literatura

- [1] E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, Solving ordinary differential equations, I: Nonstiff problems, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics, no. 8, Springer, Berlin, 1993.
- [2] E. Hairer, G. Wanner, Solving ordinary differential equations II: Stiff and Differential - Algebraic Problems, Springer, Berlin, 1996.