1. Bazując na podanych na wykładzie wzorach $\mathrm{Res}(P,Q) = (-1)^{nm}\mathrm{Res}(Q,P)$ i $\mathrm{Res}(P,Q) = b^{n-l}\mathrm{Res}(R,Q)$ gdzie $P = qQ + R$, $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$, $l = \deg(R)$, b to wiodący współczynik Q napisz funkcję obliczającą rugownik dwu wielomianów o współczynnikach z ciała.

2. Używając komputera do obliczania rugownika (funkcja `resultant`) i faktoryzacji wielomianów jedenej zmiennej znajdź wymierne rozwiąznia układu równań:

$$2y^3 + (6x-3)y^2 + \big(6x^2 - 6x - 4\big)y + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$y^2 + (-2x-6)\,y + x^2 - 6x = 0$$

Wskazówka: Jedną zmienną potraktuj jako parametr, co sprowadza problem do szukania wartości parametru dla których wielomiany mają wspólny pierwiastek.

3. Niech $Ax = y$ będzie układem równań liniowych o współczynikach całkowitych. Uzasadnij że jeśli ten układ ma rozwiązanie całkowitoliczbowe to ma też rozwiązanie modulo p dla dowolnej liczby pierwszej p. Uzasadnij że jeśli $y = 0$ i układ ma niezerowe rozwiązanie całkowitoliczbowe to ma niezerowe rozwiązanie modulo p dla dowolnej liczby pierwszej p. Co można powiedzieć o wymiarze przestrzeni rozwiązań?

4. Znajdź rozkład bezkwadratowy wielomianu $P = x^7 - 9x^6 + 29x^5 - 45x^4 + 55x^3 - 63x^2 + 27x - 27$ (nad liczbami całkowitymi), tzn. zapisz go w postaci $P = \prod Q_i^i$ gdzie Q_i nie mają czynników wielokrotnych. Użyj komputera do oblicznia GCD i pochodnej (pochodna to `D(P, x)`).

5. Zastosuj podaną na wykładzie metodę wyznaczania członów logarytmicznych do pokazania że całka z $\frac{1}{\log(x)}$ i całka z $\frac{x}{\exp(x)-1}$ nie są elementarne.

6. Niech P będzie wielomianem od x stopnia 3 bez czynników wielokrotnych. Uzasadnij że jeśli $f(x) = R(x)\frac{1}{\sqrt{P}}$ gdzie R to funkcja wymierna od x to istnieje funkcja wymierna Q taka że $f - (Q\sqrt{P})'$ jest postaci $H(x)\frac{1}{\sqrt{P}}$ gdzie H jest funkcją wymierną taką że jej mianownik nie ma pierwiastków wielokrotnych (jest to wariant redukcji Hermita dla funkcji algebraicznych).