1. Zakładamy że Q_i są wielomianami które są wzajemnie względnie pierwsze. Uzasadnij że jeśli

$$U = \prod_{i=1}^{m} Q_i$$

i P_i są wielomianami to

$$W = U \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i}{Q_i}$$

jest wielomianem. Dodatkowo, jeśli P_i i Q_i są wzajemnie względnie pierwsze to U i W są względnie pierwsze.

2. Niech P będzie wielomianem jednej zmiennej nad ciałem algebraicznie domkniętym K charakterystyki 0. Uzasadnij że istnieje tylko skończnie wiele wartości $a \in K$ takich że wielomian $P + a$ ma pierwiastki wielokrotne. Uzasadnij że dla $a_1 \neq a_2$ wielomiany $P + a_1$ i $P + a_2$ mają rozłączne zbiory pierwiastków.

Wskazówka: Pierwiastki wielokrotne $P + a$ to pierwiastki pochodnej.

3. Niech ϕ będzie funkcją wymierną jednej zmiennej o współczynnikach z ciała K. Stopnień $\deg(\phi)$ definujemy jako maksimum stopni licznika i mianownika w postaci nieskracalnej. Uzasadnij że jeśli K jest algebraicznie domknięte charakterystyki 0 to $\deg(\phi)$ można zdefiniować jako takie k że $k = |\phi^{-1}(a)|$ dla nieskończenie wielu a ($\phi^{-1}(a)$ oznacza przeciwobraz zaś $|\cdot|$ moc). Wywnioskuj stąd że jeśli K jest ciałem charakterystyki 0 to $\deg(\phi \circ \psi) = \deg(\phi)\deg(\psi)$. Wywnioskuj stąd że jeśli h jest automorfizmem $K(x)$ to $\deg(h(x)) = 1$.

4. Niech $P = 2x^2 + 5x + 3$, $Q = 5x^3 + 5x^2 + 4x + 4$. Sprawdź że modulo 61 wielomiany P i Q mają wspólny dzielnik stopnia 2, zaś nad liczbami całkowitymu największy wspólny dzielnik P i Q jest stopnia 1. Ponadto 61 jest większe niż 2 razy maksimum współczynników P, Q i wspólnego dzielnika.