1. Niech $P = x^5 + 7x^3z^3 + 4y^4z^2 + 3y^2z$. Znajdź wyraz wiodący P dla różnych porządków na jednomianach: leksykograficznego (gdzie x jest największe), leksykograficznego z odwróconym porządkiem zmiennych (czyli z jest największe), porządku stopień potem leksykograficzny, porządku stopień potem odwrotny leksykograficzny. Czy istnieje porządek taki że $3y^2z$ jest wyrazem wiodącym?

2. Niech $p1 = 7x^2y^4z - 2xy^6 + x^2y^2$, $p2 = xy^3z + xy^2z^2 + x^2z^3$, $p3 = x^4y^5z + 2x^3y^2z - 3xy^2z^4$. Znajdź porządki na jednomianch (3 różne, dla każdego wielomianu inny) takie że powyższe wielomiany są uporządkowane od największego wyrazu do najmniejszego.

3. Niech $P_1 = x + xy$, $P_2 = y + xy$. Na jednomianach rozpatrujemy porządek dany przez stopień z porządkiem leksykograficznym rozstrzygającym dla równych stopni. Sprawdź że wtedy $Q = xy$ ma dwie redukcje względem P_1 i P_2 (czyli wynik redukcji jest niejednoznaczny).

4. Uzasadnij że jeśli ideał I jest generowany przez pojedyńczy wielomian f to $\{f\}$ jest bazą Groebnera I dla dowolnego dopuszczalnego porządku na jednomianach.

5. Dla ideału generowanego przez wielomiany $z^2-x+y-1$, x^2-yx+x, y^3-xz+2 sprawdź jak wygląda baza Groebnera dla porządku leksykograficznego ze zmienną z jako największą (używany dla typu `Polynomial`), dla porządku leksykograficznego ze zmienną x jako największą i dla porządku stopień a potem odwrotnie leksykografcznie (typ `HomogeneousDistributedMultivariatePolynomial`).

Uwaga: Proszę zobaczyć też `groebner1.input`.

6. Niech I będzie ideałem generownym przez $xz - y^2, x^3 - z^3$. Sprawdź czy $4x^2y^2z^2 - y^6 - 3z^6$ należy do tego idału. Podobnie dla $xy - 5z^2 + x$.

Wskazówka: Redukcję wielomianu można obliczać funkcją `normalForm`.

7. Jeśli dana jest baza Groebnera G dla ideału I względem porządku leksykograficznego to elementy G zależące tylko od ostatnich k zmiennych tworzą bazę Groebnera dla przekroju I z pierścieniem wielomianów zależących tylko od ostatnich k zmiennych. Jaki to daje wynik dla ideału generowanego przez p i q gdzie $p = x^2 + 2y^2 - 3$, $q = x^2 + xy + y^2 - 3$. Porównaj wynik z rugownikiem p i q względem zmiennej y.

8. Przekrój ideałów I i J można wyznaczyć dodając dodatkową zmienną

t o której zakładamy że jest większa od pozostałych zmiennych i biorąc elementy bazy Groebnera ideału generowanego przez tI i $(1-t)J$ nie zależące od t. Użyj to do wyznaczenia przekroju ideałów I generowanego przez p i q z poprzedniego zadania i J generowanego przez x i y.

9. Uzasadnij że w pierścieniu R z jednoznacznością rozkładu przekrój ideałów głównych jest generowany przez najmniejszą wspólną wielokrotność generatorów, tzn. jeśli $I_1 = Ra$, $I_2 = Rb$ to $I_1 \cap I_2 = R\mathrm{lcm}(a,b)$.

10. Uzasadnij że w pierścieniu R z jednoznacznością rozkładu suma ideałów jest zawarta w ideale generowanym przez największy wspólny dzielnik generatorów, ale zwykle jest mniejsza. Tzn. jeśli $I_1 = Ra$, $I_2 = Rb$ to $I_1 \cup I_2 \subset R\gcd(a,b)$, ale zwykle istnieje ideał J mniejszy od $R\gcd(a,b)$ taki że $I_1 \cup I_2 \subset J$.

11. Bazując na faktach podanych w poprzednich trzech zadaniach zaproponuj metodę obliczania największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności bazowaną na obliczaniu baz Groebnera. Na przykładach sprawdź że metoda działa.

12. Niech będzie dany skończony zbiór T wielomianów o współczynnikach wymiernych i niech G będzie bazą Groebnera ideału generowanego przez T. Uzasadnij że istnieje skończony zbiór liczb pierwszych S taki że dla $p \notin S$ baza Groebnera dla ideału generowanego przez redukcję elementów T modulo p jest otrzymana przez redukcję elementów G modulo p.

13. Zapoznaj się z przykładami z pliku `groebner1.input`. Traktując listy wielomianów jako układy równań spróbuj podać ich rozwiązania.

14. Niech krzywa na płaszczyźnie będzie zadana w formie parametrycznej. Traktując parameter jako dodatkową zmienną daje to układ równań trzech zmiennych. Znajdując elementy ideału odpowiadającego tym równaniom nie zależące od paramerу można otrzymać układ równań dla krzywej (może to dać więcej punktów niż parametryzacja, ale nad ciałem algebraicznie domkniętym dostaniemy w ten sposób najmniejszy zbiór zadany równaniami i zawierający punkty krzywej). Bazując na zadaniu 7 z tej listy do wyznaczenia idału przekształć do postaci bez parametru następującą krzywą $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = \frac{t}{t^2-3}$.

15. Znajdź układ równań dla powierzchni zadanej przez równania: $x(t,u) = \sin(t)\sin(u)$, $y(t,u) = \sin(t)\cos(u)$, $z(t,u) = \cos(t)$. Potraktuj $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\sin(u)$ i $\cos(u)$ jako dodatkowe zmienne związane równaniami trygonometrycznymi.

16. Zakładamy że wielomian f jest bezkwadratowy. Uzasadnij że ideał generowany przez f jest swoim własnym radykałem. Ogólniej, jeśli g jest częścią bezkwadratową f, tzn. $f = \prod_{i=1}^{l} f_i^{k_i}$ zaś $g = \prod_{i=1}^{l} f_i$ dla parami różnych nieprzywiedlnych f_i to ideał generowany przez g jest radykałem ideału generowanego przez f.

17. Niech $p_1 = xy^2$, $p_2 = x(x-y)^2$. Uzasadnij że radykał ideału I generownego przez $\{p_1, p_2\}$ jest generowny przez x, ale I nie jest generowany przez pojedyńczy wielomian.

18. Niech $p_1 = xy^2 + 2y^2$, $p_2 = x^4 - 2x^2 + 1$ i niech I będzie ideałem generowanym przez p_1 i p_2. Używając kryterium podane na wykładzie uzasadnij że $f = y - x^2 + 1$ należy do radykału I. Jaka jest najmniejsza potęga f należąca do I?