1. Wielomiany trygonometryczne (o współczynnikach wymiernych) to wielomiany od $\cos(x)$ i $\sin(x)$ upraszcznane przy pomocy relacji $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, tzn. wielomany trygonometryczne różniące się of wielokrotność $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 - 1$ traktujemy jako równe. Uzasadnij że każdy wielomian trygonometryczny $P(\cos(x), \sin(x))$ można zapisać w postaci

$$P(\cos(x), \sin(x)) = Q(\cos(x)) + R(\cos(x)) \sin(x)$$

gdzie $Q(\cos(x))$ i $R(\cos(x))$ są wielomiamami trygonometrycznymi zależacymi tylko od $\cos(x)$ i że zapis ten jest jednoznaczny, tzn. dwa wielomiany trygonometryczne są równe wtedy i tylko wtedy gdy mają ten sam zapis. Uzasadnij że wielomian trygonometryczny ma multyplikatywną odwrotność wtedy i tylko wtedy gdy sprowadza się do liczby. Uzasadnij że $\cos(x)$, $1 - \sin(x)$ i $1 + \sin(x)$ nie mają nietrywialnego rozkładu na czynniki. Uzasadnij że rozkłady na czynniki

$$\cos(x) \cos(x) = \cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2 = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))$$

są istotnie różne.

Uwaga: Oznacza to że dla wielomianów trygonometrycznych nie musi istnieć największy wspólny dzielnik, co powoduje kłopoty przy skracaniu ułamków.

2. Które z poniższych zbiorów funkcji z działaniami arytmetycznymi robionymi punktowo i ze zwykłym różniczkowaniem są ciałami. Które są ciałami różniczkowymi?

1. zbiór wielomianów trygonometrycznych
2. zbiór ułamków których licznikami i mianownikami są wielomiany trygonometryczne
3. zbiór funkcji postaci $R(\cos(x))$ gdzie R jest funkcją wymierną jednej zmiennej
4. zbiór funkcji postaci $R(|x|)$ gdzie R jest funkcją wymierną jednej zmiennej
5. zbiór funkcji postaci $R(x, |x|)$ gdzie R jest funkcją wymierną dwu zmiennych

6. zbiór funkcji postaci $R(\exp(x^2))$ gdzie R jest funkcją wymierną jednej zmiennej
7. zbiór funkcji postaci $R(x) + Q(x)\sqrt{x+1}$ gdzie R i $Q(x)$ są funkcjami wymiernymi jednej zmiennej
8. zbiór funkcji postaci $P(\exp(x))$ gdzie P jest wielomianem jednej zmiennej
9. zbiór funkcji postaci $P(\sqrt{x+1})/T(x)$ gdzie P i T są wielomiani jednej zmiennej

3. Dlaczego poniższy rachunek jest niepoprawny:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = i \cdot i = -1$$

4. Poniżej jest wynik „prostego" obliczenia w systemie FriCAS (przykład łatwo przetłumaczyć tak by działał w innych systemach). Co jest źródłem problemu.

```
c1 := sqrt(2)*sqrt(3*x)+sqrt(6*x)


             +--+    +-+ +--+
   (1)  \|6x  + \|2 \|3x
                                                 Type: Expression(Integer)
c2 := sqrt(2)*sqrt(3*x)-sqrt(6*x)


               +--+    +-+ +--+
   (2)  - \|6x  + \|2 \|3x
                                                 Type: Expression(Integer)
(1/c1)*c1*c2*(1/c2)


   (3)  1
                                                 Type: Expression(Integer)
(1/c1)*(c1*c2)*(1/c2)


   (4)  0
                                                 Type: Expression(Integer)
```

5. Na ciele funkcji wymiernych jednej zmiennej wprowadzamy operację różniczkowania wzorem $Df = xf'$ gdzie f' to zwykła pochodna. Uzasadnij że otrzymamy w ten sposób ciało różniczkowe. Uzasadnij że tak otrzymane ciało różniczkowe jest izomorficzne z najmniejszym ciałem różniczkowym (ze zwykłą pochodną) zawierającym $\exp(x)$.

6. Oszacuj ilość operacji arytmetycznych potrzebnych do wykonania działań takich jak dodawanie, mnożenie, dzielenie z resztą na wielomianach jednej zmiennej używając naiwnych metod.

7. Uzasadnij że jeśli operacje na liczbach wymiernych wykonujemy bez skracania to długość licznika i mianownika może narastać wykładniczo z ilością operacji.