1. Uzasadnij że jeśli elementy $a_1, \ldots, a_n$ są elementami większego ciała zawierającego liczby wymierne $\mathbb{Q}$, to dowoly element $x \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ można przedstawić jako

$$x = \frac{P(a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_1, \ldots, a_n)}$$

gdzie P i Q są wielomianami a współczynikach całkowitych zaś $Q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Jeśli dodatkowo założymy że $a_1, \ldots, a_n$ są algebraicznie niezależne to czy taki zapis jest jednoznaczny?

2. Uzasadnij że jeśli $y = \sqrt{x^3 + x + 1}$, $F = \mathbb{Q}(x)$ to każdy element $f \in F(y)$ można zapisać w postaci

$$f = \frac{P(x, y)}{Q(x)}$$

gdzie P jest wielomianem dwu zmiennych zaś Q jest niezerowym wielomianem jednej zmiennej.

3. Niech y i F będą jak w zadaniu poprzednim. Elementy $f \in F(y)$ zapisujemy jako ilorazy wielomianów od x i y, stopnia co najwyżej 1 ze względu na y. Uzasadnij że $f = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy licznik jest zerem.

4. Uzasadnij że $\log(x)$ jest przestępny nad $F = \mathbb{Q}(x)$.

Wskazówka: Podobnie jak w lemacie o przestępności $\exp(x)$ pokaż że nie istnieje funkcja wymierna R taka że $R(x)' = \frac{1}{x}$.

5. Niech $F \subset L = K(a)$ będzie ciałam, a jest pierwiastkiem kwadratowym z $b \in F$, tzn. $a^2 = b$. Uzasadnij że jeśli element $c \in F$ jest kwadratem w L to c jest kwadratem w F, lub $c = d^2 b$. Bazując na powyższym uzasadnij że 5 nie jest kwadratem w $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza liczby wymierne. Bazując na tym uzasadnij że dowolny element z $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ można zapisać jako liniową kombinację $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}\sqrt{5}$ o współczynnikach wymiernych. Innymi słowy $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$. W podobny sposób można pokazać że jeśli a_i są parami względnie pierwszymi liczbami całkowitymi to $\sqrt{a_i}$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$.

6. Niech $P(x) = x^3 + x + 1$ i $D(x) = x + 1$. Zakładamy że ciałem podstawowym są liczby wymierne i że $P(\gamma) = 0$. Oblicz $1/D(\gamma)$ używając metody z dowodu lematu na wykładzie. Użyj FriCAS (funkcję `extendedEuclidean`) by znaleźć wielomiany A i B takie że $AP + BD = 1$.

Uwaga: By użyć `extendedEuclidean` P i D muszą być właściwego typu np. `UnivariatePolynomial(x, Fraction(Integer))`. Trzeba zadalarować typy zmiennych lub użyć operator `::` do zmiany typu.

7. Niech dane będzie wyrażenie w stylu $\exp(\sqrt{x+1})/(1+x)$. Wypróbuj w systemie FriCAS `numer`, `denom`, `kernels`, `tower`, `variables` na takim wyrażeniu. Zwróć uwagę na typ wyniku.

8 Zobacz `http://axiom-wiki.newsynthesis.org/ListProgramming`
Wypróbuj operacje na listach. Spróbuj

```
p := univariate(x^9 + 2*x^5 + 3)
pl := p pretend List(Record(ex : Integer, c : Integer))
```

Co dają operacje na listach zastosowane do `pl`