

1. Zakładamy że operator różniczkowy $P = \sum_{i=0}^k a_i \partial_x^i$ (w szczególności P jest operatorem o stałych współczynnikach). Uzasadnij że P można zapisać jako iloczyn dwu operatorów o stałych współczynnikach wtedy i tylko wtedy gdy wielomian $W_P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ jest rozkładalny.

Podobnie, niech $\delta = x\partial_x$ i $P = \sum_{i=0}^k a_i \delta^i$. Uzasadnij że P można zapisać jako iloczyn dwu operatorów o tej samej postaci wtedy i tylko wtedy gdy wielomian $W_P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ jest rozkładalny.

Sformułuj podobną własność dla wspólnego dzielnika. Uzasadnij że własność powyżej zachodzi nawet jeśli jako czynniki dopuszczamy operatory o współczynnikach będących wielomianami x .

2. Opisz strukturę najmniejszego ciała zawierającego liczby wymierne i $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$. Jak reprezentować elementy tego ciała w komputerze.

3. Opisz strukturę najmniejszego ciała zawierającego liczby wymierne i $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sqrt{\cos(x)\sin(x)^3}$, $\sqrt{\cos(x)^3\sin(x)}$, $\sqrt{\tan(x)}$. Jak reprezentować elementy tego ciała w komputerze.

4. Zapoznaj się z operacjami `degree`, `leadingCoefficient`, `reductum`, `monomial`. Wypróbuj przykładową procedurę `mno1.input`. Wzorując się na niej napisz procedurę która oblicza pochodną wielomianu jednej zmiennej.