1. Wielomiany można reprezentować przechowując w tablicy wykładniki i współczynniki. Np. wielomian $2x^{11}+3x^5+7$ reprezentujemy tablicą której kolejnymi elementami są $11, 2, 5, 3, 0, 7$. Naszkicuj procedurę dodawania i mnożenia wielomianów w takiej postaci.

2. Zaproponuj rozszerznie reprezentacji z zadnia 1 do wielomianów wielu zmiennych (można to zrobić na co najmniej dwa różne sposoby). Przedyskutuj wady i zalety takiej reprezentacji w porównaniu z reprezentacją przy pomocy list naszkicowaną na wykładzie.

3. Przypominam że element c ciała różniczkowego K z różniczkowaniem D nazywamy stałą jeśli $Dc = 0$. Uzasadnij że jeśli $F \subset K$ jest mniejszym ciałem różniczkowym takim że stała $c \in K$ jest algebraiczna nad F, zaś wielomian minimalny P dla c wybierzemy tak że współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1 to współczynniki P są stałe.

Wskazówka: Zróżniczkuj i przypomnij sobie definicję wielomianu minimalnego.

4. Uzasadnij że jeśli wielomian $P = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ jest nieprzywiedlny (nie rozkłada się na nietrywialne czynniki) to wielomian $Q = \sum_{i=0}^{m} a_{m-i} x^i$ otrzymany przez odwrócenie kolejności współczynników też jest nieprzywiedlny. Zakładając że P jest wielomianem minimalnym dla c podaj element dla którego Q jest wielomianem minimalnym.

5. Pochodną logarytmiczną nazywamy wyrażenie postaci $\frac{Df}{f}$ gdzie f jest niezerowym elementem ciała różniczkowego. Uzasadnij następujący wzór na pochodną logarytmiczną:

$$\frac{Df}{f} = n_1 \frac{Df_1}{f_1} + \cdots + n_k \frac{Df_k}{f_k}$$

gdzie $f = f_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot f_k^{n_k}$, f_i są niezerowymi elementami ciała różniczkowego zaś n_i są liczbami całkowitymi.

6. Jeśli $\theta_1 = x$, $D(\theta_1) = 1$, $\theta_2 = \exp(x^2)$, $D(\theta_2) = 2\theta_1\theta_2$, to $x + \exp(x^2)$ można utożsamiać z elementem $\theta_1 + \theta_2$ ciała różniczkowego $\mathbb{Q}(\theta_1, \theta_2)$. Daje to opis dla ciała różniczkowego zawierającego $x + \exp(x^2)$ (jest wiele różnych takich ciał, ale wybór wyżej jest naturalny). W podobny sposób opisz ciała różniczkowe zawierające a) $\exp(x)/x$, b) $\exp(x) + \log(x)$, c) $\exp(\sqrt{x})$.

7. Rozważmy macierze kwadratowe wymiaru 2 na 2 o elementach z pewnego ciała różniczkowego. Uzasadnij że jeśli różniczkowanie macierzy zdefiniuję tak że różniczkuję wszystkie elementy macierzy to spełniony będzie wzór Leibnitza. Również jeśli A jest ustaloną macierzą zaś $DB = AB - BA$ to D spełnia wzór Leibnitza.

Uwaga: Mnożenie macierzy nie jest przemienne i poprawna postać wzoru Leibnitza to $D(fg) = D(f)g + fDg$.

8. Na wielomianach definiuję operację Δ wzorem $(\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x)$. Sprawdź że Δ nie spełnia wzoru Leibnitza.

Uwaga: Δ ma podobne własności do różniczkowania, ale wymaga nieco bardziej skomplikowaego podejścia.