1. Uzasadnij że każdy automorfizm ciała $K = \mathbb{Q}(x)$ jest postaci $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad-bc \neq 0$. Uzasadnij że każdy automorfizm różniczkowy K ze zwykłą pochodną jest postaci $x \mapsto x + a$. $a \in \mathbb{Q}$. Uzasadnij że jeśli zamiast zwykłej pochodnej różniczkowanie na K zdefiniujemy wzorem $x' = x$ to każdy automorfizm różniczkowy K z takim różniczkowaniem jest postaci $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

2. Niech $K = \mathbb{Q}(x, y)$ gdzie $y^2 = ax^2+bx+c$. Uzasadnij że jeśli $a = s^2$ to biorąc $z = y - sx$ otrzymamy izomorfizm ciała K z ciałem $\mathbb{Q}(z)$. Podobnie, uzasadnij że jeśli $c = t^2$ to biorąc $z = \frac{y-t}{x}$ otrzymamy izomorfizm ciała K z ciałem $\mathbb{Q}(z)$. Wylicz na co przejdzie zwykła pochodna w K, tzn. jak dobrać pochodną w $\mathbb{Q}(z)$ by podany wyżej izomorfizm ciał był izomorfizmem ciał różniczkowych.

Uwaga: Powyższe izomorfizmy są znane pod nazwą podstawień Eulera.

3. Zakładamy że element y jest pierwiastkiem stopnia n nad F, tzn. wielomian minimalny y nad F to $X^n - a$ dla pewnego $a \in F$. Podaj wzór na ślad Tr z $F(y)$ do F. Podobnie, gdy $n = 2$ podaj wzór na normę N z $F(y)$ do F. Niech $F = \mathbb{Q}(x, \exp(x))$. Oblicz $\mathrm{Tr}(f)$ i $\mathrm{N}(f)$ dla $f = \exp(x) + \sqrt{\exp(x) - x}$ i $f = \frac{1}{x+\sqrt{\exp(x)-x}}$.

4. Funkcja csc jest zdefiniowana wzorem $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Wylicz funkcję odwrotną w terminach logarytmu zespolonego.

5. Niech $y^2 = x^3 + x + 1$. Niech $R = \mathbb{Q}[x]$. Niech $S = R[y]$. Uzasadnij że element f pierścienia S jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy norma f z $\mathbb{Q}(x, y)$ do $\mathbb{Q}(x)$ jest odwracalnym elementem R, tzn. jest stałą.

6. Wypróbuj `realElementary` i `normalize`. Porównaj wyniki dla różnych funkcji (trygonometrycznych, odwrotnych do trygonometrycznych, itp.). Użyj `tower` by zobaczyć struktórę odpowiednich ciał różniczkowych. Zobacz co robi `height` dla kerneli.

7. Liouville zdefiniował że funkcje rzędu zero to funkcje algebraiczne. Funkcje rzędu 1 to funkcje otrzymane przez operacje algebraiczne z funkcji rzędu 0 i z logarytmów i eksponent funkcji rzędu 0. Ogólniej funkcje rzędu $n+1$ to funkcje otrzymane przez operacje algebraiczne z funkcji rzędu n i z logarytmów i eksponent funkcji rzędu n. Jeśli funkcję da się zapisać na wiele sposobów, bierzemy taki sposób który daje najmnejszy rząd (np. $x^2 = \exp(2\log(x))$ co by sugerowało rząd 2, ale jest to funkcja rzędu 0). Napisz funkcję FriCAS-a która oblicza tak określony rząd funkcji elementarnej, zakładając że funkcja jest zapisana w najprostszy możliwy sposób.

Wskazówka: Definicja jest rekursywna i naturalna implementacja będzie rekursywna, używając kernele. Funkcja `is?` pozwala sprawdzić jakiego rodzaju jest kernel.

8. FriCAS ma domenę `SimpleAlgebraicExtention` (skrót `SAE`) do reprezentowania rozszerzeń algebriaicznych. Użyj ją by reprezentować ciało $\mathbb{Q}(x, y)$ z zadania 5. Oblicz normę i ślad kilku wybranych elementów. Podobnie dla rozszerzenia $\mathbb{Q}(x)$ o rozwiązanie równania $Y^3 + Y + x^2 + 3 = 0$ (gdzie Y jest zmienną, zaś x elementem ciała podstawowego).