1. Uzasadnij że $\exp(x^2)$ nie ma całki elementarnej.

2. Rozważmy $F = \mathbb{Q}(x)$ i pierścień $R = F[\tan(x)] \subset \mathbb{Q}(x, \tan(x))$. R jest zachowywany przez zwykłą pochodną. Niech $P = \tan(x)^2 + 1$. Sprawdź że P dzieli P'. Uzasadnij że P jest jedynym z dokładnością do mnożenia przez elementy F elementem nierozkładalnym R o tej własności.

3. Przypominam że funkcja W (z poprzedniej listy) jest rozwiązaniem równania $W' = \frac{W}{z(W+1)}$. Ciało różniczkowe zawierające W to $\mathbb{Q}(z, W)$ z różniczkowaniem D zadanym przez wzory $Dz = 1$, $DW = \frac{W}{z(W+1)}$. Na tym ciele rozważamy różniczkowanie D_2 zadane wzorem $D_2 f = (W + 1)Df$. Wtedy D_2 zachowuje $F[W]$ gdzie $F = \mathbb{Q}(z)$. Sprawdź że W dzieli $D_2 W$.

Uwaga: Można pokazać że powyżej W jest jedynym z dokładnością do mnożenia przez elementy F elementem nierozkładalnym $F[W]$ o tej własności, ale dowód jest skomplikowany.

4. Niech $F = \mathbb{Q}(x, \theta_1, \theta_2)$ z różniczkowaniem D zadanym wzorami $Dx = 1$, $D\theta_i = 1/x$ dla $i = 1, 2$. Jak wyglądają stałe w tym ciele różniczkowym.

5. Niech $F = \mathbb{Q}(x, \theta)$ z θ będącą eksponentą. Zapisz $f = \frac{\theta^2+x}{\theta(\theta-x)}$ jako sumę wielomianu uogólnionego tzn. elementu $K[\theta, \theta^{-1}]$ gdzie $K = \mathbb{Q}(x)$ i funkcji wymiernej właściwej z mianownikiem względnie pierwszym z θ.

6. Niech $\mathrm{Ei}(x)$ oznacza całkę z $\frac{\exp(x)}{x}$. Uzasadnij że każdą funkcję postaci $R(x)\exp(x)$ gdzie $R(x)$ jest funkcją wymierną można scałkować przy pomocy funkcji elementarnych i (przesunięć) Ei. Wypróbuj przykłady w systemie FriCAS.

Wskazówka: Użyj rozkład R na (zespolone) ułamki proste i całkowanie przez części.

7. W sytemie FriCAS comenda `)trace` (z nawiasem otwierającym na początku linii) pozwala na śledzenia wykonania. Wypróbuj

```
)trace INTEF )math
integrate(x*sin(x), x)
```

Co możesz wywnioskować z powyższego? Więcej informacji można uzyskać po `)trace RDEEFX )math` i `)trace INTTR )math`.