Definicja 0.1 *Ciało różniczkowe K nazywamy rozszerzeniem elementarnym ciała F jeśli istnieją elementy $\theta_1, \ldots, \theta_n \in K$ takie że $K = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ i pisząc $F_i = F(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi jeden z warunków niżej:*

- *θ_i jest algebraiczne nad F_i, tzn. istnieje wielomian P o współczynnikach w F_i takie że $P(\theta_i) = 0$*
- *$\theta_i = \exp(u)$ dla pewnego $u \in F_i$*
- *$\theta_i = \log(u)$ dla pewnego $u \in F_i$*

Przy tym θ_i będziemy traktować jako eksponentę czy logarytm tylko wtedy gdy nie zachodzi pierwszy przypadek. Np. $f(x) = \exp(\frac{\log(x)}{2}) = \sqrt{x}$ traktujemy nie jako eksponente a jako rozwiązanie równania $f^2(x) = x$. Podobnie $x = \log(\exp(x))$ nie traktujemy jako logarytm. Ogólniej będziemy zakładać że rozważanych wyrażeń nie da się zastąpić prostszymi (tzn. z mniejszą ilością eksponent i logarytmów) lecz równoważnymi wyrażeniami.

Definicja 0.2 *Funkcję f nazywamy funkcją elementarną jeśli jest elementem pewnego rozszerzenia elementarnego ciała funkcji wymiernych.*

3. Przykład: Niech $f(x) = \sqrt{\exp(x + \log(x))}$. $f \in K = \mathbb{Q}(x)(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ gdzie $\theta_1 = \log(x)$, $\theta_2 = \exp(x + \log(x))$, $\theta_3 = \sqrt{\exp(x + \log(x))}$. A więc f jest funkcją elementarną.

4. Uwaga: Dla danej funkcji elementarnej $f(x)$ istnieje wiele rozszerzeń elementarnych K ciała $\mathbb{C}(x)$ takich że $f \in K$. Mianowicie, mając jedno K możemy do niego dodać nadmiarowe elementy. Co gorsza, możliwe są różne zapisy tej samej funkcji. Np. funkcję z poprzedniego przykładu możemy zapisać jako $f(x) = \sqrt{x \exp(x)}$, i użyć $K = \mathbb{Q}(x)(\theta_1, \theta_2)$ dla $\theta_1 = \exp(x)$, $\theta_2 = \sqrt{x \exp(x)}$. Jednakże mając wyrażenie zadające $f(x)$ możemy w naturalny sposób zbudować rozszerzenie elementarne: każdemu logarytmowi i eksponecie które sie pojawią w f a także każdemy podwyrażeniu algebraicznemu (jak pierwiastek) przyporządkowujemy generator rozszerzenia. Różne wyrażenia zadające $f(x)$ mogą wtedy prowadzić do różnych rozszerzeń elementarnych. Dobrze jest uprościć wyrażenie przed budową rozszerzenia, tzn. drugie wyrażenia na f jest lepsze bo prowadzi do mniejszego rozszerzenia.

Głownym wynikiem o rozszerzeniach elementarnych jest twierzenie Liouville'a-Ostrowskiego. Zaniem je podamy potrzebujemy trochę faktów.

Potrzebujemy czysto algebraiczne operacje śladu i normy. Niech ciało $L = F(\theta)$ będzie rozszerzeniem F o element algebraiczny, czyli taki że istnieje wielomian P o współczynnikach w F spełniający $P(\theta) = 0$. Pomiędzy takimi P wybieramy wielomian najmniejszego stopnia. Taki wielomian nazywamy wilomianem minimalnym θ. Wtedy jeśli stopień P to m to dowolny element $y \in L$ można zapisać jednoznacznie w postaci $y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta^i$ z $a_i \in F$. Przypomnę że istnieje ciało K takie że P ma m pierwiastków w K (można np. wziąść algebraiczne domknięcie ciała F).

Fakt 0.3 *Niech θ_j będzie jednym z pierwiastków P w K. Przyporządkowanie*

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta^i \mapsto y_j = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \theta_j^i$$

jest homomorfizmem z L w K który oznaczymy ι_j. Każdy homomorfizmem z L w K jest takiej postaci.

Definicja 0.4 *Niech $\iota_1, \ldots, \iota_m$ będą wszystkimi homomorfizmemi L w K jak wyżej. Ślad $\mathrm{Tr}(y)$ definijemy wzorem:*

$$\mathrm{Tr}(y) = \sum_{j=1}^{m} \iota_j(y).$$

Normę $\mathrm{N}(y)$ definujemy wzorem

$$\mathrm{N}(y) = \prod_{j=1}^{m} \iota_j(y).$$

Komentarz: Norma niejawnie pojawia się przy usuwaniu niewymierności z mianownika. Mianowicie wybieramy K tak by $L \subset K$ i numerujemy θ_j tak by $\theta_1 = \theta$ (zawsze można to zrobić). Jeśli $f = \frac{z}{y}$ i $y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta^i$ to definiuje my M wzorem

$$M = \prod_{j=2}^{m} \iota_j(y) = \prod_{j=2}^{m} (\sum_{i=0}^{m-1} a_i\theta_j^i)$$

Wtedy $My = \mathrm{N}(y)$ i $f = \frac{Mz}{My} = \frac{Mz}{\mathrm{N}(y)}$. Ponieważ $\mathrm{N}(y) \in F$ to w tej formie mianownik f nie zawiera θ. Można pokazać że M daje się zapisać w terminach θ, więc jeśli z zawiera θ tylko w liczniku to osiągneliśmy efekt eliminacji θ w mianownika. Szczególnym przypadkiem tej procedury jest eliminacja pierwiastków kwadratowych z mianownika. Wtedy drugi pierwiastek to otrzymujemy mnożąc pierwszy przez -1, w więc M to y z θ zastąpionym przez $-\theta$.

Fakt 0.5 $\mathrm{Tr}(y) \in F$, $\mathrm{N}(y) \in F$. *Wartości te nie zależą od tego jakie konkretnie K użyjemy do ich wyliczenia. Ponadto $\mathrm{Tr}(c_1y_1+c_2y_2) = c_1\mathrm{Tr}(y_1)+c_2\mathrm{Tr}(y_2)$ dla $c_1, c_2 \in F$, $\mathrm{N}(y_1y_2) = \mathrm{N}(y_1)\mathrm{N}(y_2)$. Dla $y \in F$ mamy $\mathrm{Tr}(y) = my$, $\mathrm{N}(y) = y^m$. Jeśli L jest ciałem różniczkowym to $\mathrm{Tr}(y') = \mathrm{Tr}(y)'$ i $\mathrm{N}(y') = \mathrm{N}(y)'$.*

Przykład: Niech $F = \mathbb{Q}$ i $L = F(\sqrt{2})$. Elementy L można zapisać w postaci $a + \sqrt{2}b$ z $a, b \in \mathbb{Q}$. Wielomian $P(\theta) = \theta^2 - 2$. W ciele L wielomian P ma dwa pierwiastki $\theta_1 = \sqrt{2}$, $\theta_2 = -\sqrt{2}$. A więc można wziąć L jako K. Wtedy

$$\mathrm{Tr}(a + \sqrt{2}b) = (a + \sqrt{2}b) + (a - \sqrt{2}b) = 2a,$$

$$\mathrm{N}(a + \sqrt{2}b) = (a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b) = a^2 - 2b^2$$

Przykład: Ciało liczb zespolonych jest rozszerzeniem ciała liczb rzeczywistych o pierwiastek kwadratowy z -1. Czyli $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ i $P(i) = 0$ dla $P(\theta) = \theta^2 + 1$. Elementy $\mathbb{C}$ można zapisać jednoznacznie w postaci $a + bi$ z $a, b \in \mathbb{R}$. W $\mathbb{C}$ wielomian P ma dwa pierwsiastki $\theta_1 = i$, $\theta_2 = -i$. A więc można wziąć $\mathbb{C}$ jako K. Wtedy

$$\mathrm{Tr}(a + ib) = (a + ib) + (a - ib) = 2a,$$

$$\mathrm{N}(a + ib) = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |a + ib|^2$$

Przykład: Niech $F = \mathbb{Q}(x)(\log(x))$ i $L = F((x + \log(x))^{\frac{1}{3}})$. Wtedy $P(\theta) = \theta^3 - (x + \log(x))$. W ciele L wielomian P ma tylko jeden pierwiastek. Aby otrzymać dwa pozostałe trzeba dodać pierwiastki trzeciego stopnia z 1. Niech $\omega_1 = \exp(\frac{2\pi i}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. W $L(\omega_1)$ wielomian P ma trzy pierwiastki $\theta_1 = (x + \log(x))^{\frac{1}{3}}$, $\theta_2 = \omega_1\theta_1$, $\theta_3 = \omega_1^2\theta_1$. Dowolny element L można jednoznacznie zapisać w postaci $y = a + b\theta + c\theta^2$. Wtedy

$$\mathrm{Tr}(y) = (a + b\theta_1 + c\theta_1^2) + (a + b\theta_2 + c\theta_2^2)(a + b\theta_3 + c\theta_3^2) = 3a$$

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(y) &= (a + b\theta_1 + c\theta_1^2)(a + b\theta_2 + c\theta_2^2)(a + b\theta_3 + c\theta_3^2) = \\ &= a^3 + (b^3 - 3abc)(x + \log(x)) + c^3(x + \log(x))^2.\end{aligned}$$

Lemat 0.6

$$\frac{\mathrm{N}(y)'}{\mathrm{N}(y)} = \mathrm{Tr}(\frac{y'}{y}).$$

Dowód:

$$\mathrm{N}(y) = \prod_{j=1}^{m} \iota_j(y).$$

Jako że pochodna rozszerza się jednoznacznie na rozszerzenie algebraiczne to $\iota_j(y)' = \iota_j(y')$. Z wzoru na pochodną logarytmiczną iloczynu mamy

$$\frac{\mathrm{N}(y)'}{\mathrm{N}(y)} = \sum \frac{\iota_j(y)'}{\iota_j(y)} = \sum \frac{\iota_j(y')}{\iota_j(y)} = \sum \iota_j(\frac{y'}{y}) = \mathrm{Tr}(\frac{y'}{y}).$$

□

Komentarz: Więcej informacji o normie i śladzie można znaleźć w podręcznikach algebry. Np. w Algebrze Langa w rozdziale VIII (Teoria Galois) podrozdziale 5 (Norma i ślad).

Lemat 0.7 *(Twierdzenie Liouville'a-Ostrowskiego). Jeśli F jest ciałem różniczkowym, $f \in F$ i f ma funkcję pierwotną w pewnym rozszerzeniu elementarnym K ciała F to istnieją stałe $c_1, \ldots, c_l$ i funkcje $v_i \in F(c_1, \ldots, c_l)$ takie że*

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{v_i'}{v_i} = v_0' + \sum_{i=1}^{l} c_i \log(v_i)'$$

Uwaga: Powyższe twierdzenie mówi że większość funkcji elementarnych nie pomaga w całkowaniu. Do znaleziemia całki wystarczą składniki f (z których budujemy ciało F) i logarytmy. Jeśli f jest eksponentą do dodatkowe logarytmy są niepotrzebne.

Uwaga: Równość w wersji z logarytmami jest bardziej intuicyjna, ale w dowodzić będzimy wersję z $\frac{v_i'}{v_i}$.

Uwaga: Można pokazać (ale tego niżej nie robimy) że stałe c_i można wybrać algebraiczne. Dowód podał R. H. Risch, The problem of integration in finite terms, Trans. AMS 139 (1969) strony 167-189. W dowodzie niżej teoretycznie mogą się pojawić stałe przestępne.

Dowód: Niech $K = F(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ i niech $F_j = F(\theta_1, \ldots, \theta_j)$. Indukcyjnie pokażemy że istnieje l, stałe c_i, $i = 1, \ldots, l$ i funkcje $v_i \in F_j(c_1, \ldots, c_l)$, $i = 0, \ldots, l$ takie że

$$f = v_0 + \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$

Dla $F_n = K$ jest to założenie (wtedy $l = 0$). W kroku indukcyjnym trzeba pokazać jak mając $v_i \in F_j(\theta_{j+1}, c_1, \ldots, c_l)$ otrzymać nowe l, c_i i $v_i \in F_j(c_1, \ldots, c_l)$. Innymi słowy wystarczy rozważać $E = F_j(c_1, \ldots, c_l)$ i $E(\theta)$, tzn. rozszerzenie o jeden element.

Jeśli θ jest algebraiczny nad E to używamy własności odwzorowań Tr i N (gdzie Tr i N działają z $E(\theta)$ do E). Mianowicie jeśli stopień wielomianu minimalnego nad E to m to używając Lemat 0.6 i Fakt 0.5 mamy

$$mf = \mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(v_0) + \sum_{i=1}^{l} c_i \mathrm{Tr}(\frac{v_i'}{v_i}) = \mathrm{Tr}(v_0) + \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{\mathrm{N}(v_i)'}{\mathrm{N}(v_i)}$$

A więc zastępując v_0 przez $\frac{\mathrm{Tr}(v_0)}{m}$, c_i przez $\frac{c_i}{m}$ i v_i dla $i = 1, \ldots, l$ przez $\frac{\mathrm{N}(v_i)'}{\mathrm{N}(v_i)}$ otrzymam v_i i c_i dobre dla E (l się nie zmienia).

Jeśli $\theta = \log(u)$ to zakładamy że θ nie jest algebraiczna nad E (w przeciwnym razie można zastosować poprzedni przypadek). Podobnie dla $\theta = \log(u)$. Dalszą część przeprowadzimy w kilku krokach.

Krok 1. Można zakładać że wszystkie stałe należą do E. Mianowicie, jeśli $c \notin E$ to c jest przestępne i θ jest algebraiczne nad $E(c)$. Z przypadku algebraicznego dostaniemy równość ze wszystkimi składnikami w $E(c)$. v_i możemy traktować jako funkcje wymierne zmiennej c o współczynnikach w E. Podstawiając za c stałą z E tak by mianownik żadnego v_i nie był zerem dostaniemy nowe $v_i \in E$ co daje wynik.

Krok 2. Na $E(\theta)$ wprowadzamy dodatkowe różniczkowanie D_2. Jeśli θ jest logarytmem to przyjmujemy $D_2 = \partial_\theta$. Mamy $DD_2 = D_2D$. Mianowicie wystarczy pokazać że $DD_2 - D_2D = 0$. Lecz $DD_2 - D_2D$ jest różniczkowaniem (spełnia wzór Leibnitza) czyli wystarczy sprawdzić równość na elementach E i na θ. Dla $f \in E$ mamy $D_2f = 0$ i $Df \in E$, czyli mamy równość. Dalej, $D\theta \in E$, $D_2D\theta = 0$, $D_2\theta = 1$, $DD_2\theta = 0$ czyli też równość. A więc pokazaliśmy że $DD_2 = D_2D$.

Krok 3. Teraz sprawdzamy że dla $v \in E(\theta)$ mamy

$$D_2\frac{Dv}{v} = D\frac{D_2v}{v}$$

Mianowicie

$$D_2\frac{Dv}{v} = \frac{D_2Dv - DvD_2v}{v^2} = \frac{DD_2v - D_2vDv}{v^2} = D\frac{D_2v}{v}.$$

Krok 4. Teraz liczymy

$$0 = D_2f = D_2\left(Dv_0 + \sum c_i\frac{Dv_i}{v_i}\right) = D_2Dv_0 + \sum c_iD_2\frac{Dv_i}{v_i}$$

$$DD_2v_0 + \sum c_iD\frac{D_2v_i}{v_i} = D\left(D_2v_0 + \sum c_i\frac{D_2v_i}{v_i}\right).$$

A więc

$$c = D_2 v_0 + \sum c_i \frac{D_2 v_i}{v_i}$$

jest stałą czyli należy do E (dlatego potrzebowaliśmy Krok 1).

Krok 5. Teraz używamy wzór na pochodną złożenia: $D = D_E + (D\theta)\partial_\theta$. Jeśli θ jest logarytmem to powyższe można zapisać jako $D = D_E + (D\theta)D_2$. Teraz

$$Dv_0 + \sum c_i \frac{Dv_i}{v_i} = D_E v_0 + \sum c_i \frac{D_E v_i}{v_i} + (D\theta)\left(D_2 v_0 + \sum c_i \frac{D_2 v_i}{v_i}\right)$$

$$= D_E v_0 + \sum c_i \frac{D_E v_i}{v_i} + cD\theta.$$

Lecz $D\theta$ jest postaci $D\theta = \frac{Du}{u}$, czyli biorąc $v_{n+1} = u$ i $c_{n+1} = c$ mam

$$f = D_E v_0 + \sum_{i=1}^{n+1} c_i \frac{D_E v_i}{v_i}.$$

$D_E\theta = 0$, czyli mam wyrażenie żądanej postaci w rozszerzeniu E o stałą.

To kończy dowód gdy θ jest logarytmem.

Krok 2'. W przypadku gdy θ jest eksponentą w Kroku 2 przyjmujemy $D_2 = \theta\partial_\theta$. Jak poprzednio pokazyjemy że $DD_2 - D_2 D = 0$. Dla $f \in E$ dalej mamy $D_2 f = 0$ i $Df \in E$, czyli mamy równość. Następnie $D\theta = \eta\theta$ dla pewnego $\eta \in E$, czyli $D_2 D\theta = \eta D_2\theta = \eta\theta$, $D_2\theta = \theta$, $DD_2\theta = D\theta = \eta\theta$ czyli znowu równość. A więc pokazaliśmy że $DD_2 = D_2 D$.

Kroki 3 i 4 dla eksponenty są takie same jak dla logarytmu.

Krok 5'. Używamy wzoru na pochną złożenia:

$$D = D_E + (D\theta)\partial_\theta = D_E + (D\eta)\theta\partial_\theta = D_E + (D\eta)D_2.$$

Podobny rachunek jak w Kroku 5 daje

$$Dv_0 + \sum c_i \frac{Dv_i}{v_i} = D_E(v_0 + c\eta) + \sum c_i \frac{D_E v_i}{v_i}.$$

Jako że θ jest stałą dla D_E to otrzymaliśmy wyrażenie żądanej postaci w rozszerzeniu E o stałą. $\square$