Lemat 0.1 *Jeśli* $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ *jest wielomianem o współczynich w ciele różniczkowym* F *i* $\theta = \log(u)$ *dla pewnego* $u \in F$*, to stopień* P' *jest mniejszy lub równy niż stopień* P*. Jeśli przy tym współczynnik przy najwyższej potędze jest stały to stopień* P' *jest mniejszy niż stopień* P*. Jeśli* $\theta = \exp(u)$ *dla pewnego* $u \in F$*, to stopień* P' *jest mniejszy lub równy niż stopień* P*.*

Dowód: Jeśli $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ to

$$P(\theta)' = \sum_{i=0}^{m} a_i'\theta^i + \theta' \sum_{i=1}^{m} i a_i \theta^{i-1}.$$

Jeśli $\theta = \log(u)$, to $\theta' = \frac{u'}{u} \in F$. Jeśli $\theta = \exp(u)$, to $\theta' = u' \exp(u) = u'\theta$. W obu przypadkach θ' jest wielomianem od θ stopnia co najwyżej 1. Podany wyżej wzór na pochodną ma dwa człony, pierszy jest stonia co najwyżej m, drugi to θ' razy wielomian stopnia $m-1$. Oba czlony są stopnia mniejszego lub równego m, a wiec i suma jest stopnia mniejszego lub równego m. Jeśli θ jest logarytmem to drugi człon jest stopnia $m-1$. Jeśli ponadto współczynniki przy najwyższej potędze w P jest stały to pierwszy człon jest stopnia mniejszego lub równego $m-1$, a więc i suma jes stopnia mniejszego lub równego $m-1$. □

Lemat 0.2 *Zakładamy* $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ *jest wielomianem o współczynich w ciele różniczkowym* F *i* $\theta = \log(u)$ *dla pewnego* $u \in F$*. Dodatkowo zakładamy że* θ *nie jest algebraiczne nad* F*, że wszystkie stałe należą do* F *i że* P *nie ma pierwiastków wielokrotnych. Wtedy* P' *jest względnie pierwsze z* P*.*

Dowód: Przyjujemy za znany fakt że ciało F można zanurzyć w takie ciało w którym wielomian P rozkłada się na produkt wielomianów stopnia 1. Ponieważ wspólny dzielnik wielomianów nie zależy od ciało nad którym go liczymy można przyjąć że P jest postaci $P(\theta) = a_m(\theta - \theta_1)\dots(\theta - \theta_m)$. Wtedy

$$P(\theta)' = (\theta' - \theta_1')a_m(\theta - \theta_2)\dots(\theta - \theta_m) + (\theta - \theta_1)(a_m(\theta - \theta_2)\dots(\theta - \theta_m))'$$

Zauważmy że $\theta' - \theta_1' \neq 0$ mianowicie, w przeciwnym przypadku $\theta - \theta_1$ jest stałą, w więc z założenia należy do F. Lecz wtedy θ byłby algebraiczny nad F co wykluczyliśmy. A więc $P(\theta_1)' \neq 0$. Ponieważ dowolny pierwiastek P mogę przyjąć jako θ_1, oznacza to że P i P' nie mają wspólnych pierwiastków, czyli są względnie pierwsze. □

W przypadku kiedy θ jest eksponentą musimy zachować ostrożność. Mianowicie, jeśli $\theta = \exp(u)$, to $\theta' = u' \exp(u) = u'\theta$, czyli dla $P(\theta) = \theta$ mamy $\mathrm{NWD}(P, P') = \theta$. Na szczęście jest to jedyny wyjątek.

Lemat 0.3 *Zakładamy* $P(\theta) = \sum_{i=0}^{m} a_i\theta^i$ *jest wielomianem o współczynich w ciele różniczkowym* F *i* $\theta = \exp(u)$ *dla pewnego* $u \in F$*. Dodatkowo zakładamy że* θ *nie jest algebraiczne nad* F*, że wszystkie stałe należą do* F*, że* P *jest względnie pierwsze z* θ *i że* P *nie ma pierwiastków wielokrotnych. Wtedy* P' *jest względnie pierwsze z* P*.*

Dowód: Podobny do poprzedniego dowodu. Kluczowym krokiem jest pokazanie że $\theta' - \theta_1' = u'\theta - \theta_1'$ nie będzie równe 0 gdy za θ podstawiny θ_1. Czyli potrzebujemy $u'\theta_1 - \theta_1' \neq 0$. Mamy

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)' = \frac{\theta_1'\theta - \theta_1\theta'}{\theta^2}$$

i

$$\theta_1'\theta - \theta_1\theta' = \theta_1'\theta - \theta_1 u'\theta = (\theta_1' - u'\theta_1)\theta$$

A więc równość $u'\theta_1 - \theta_1' = 0$ implikuje że $\frac{\theta_1}{\theta}$ jest stałą. Z założenia stałe należą do F i wykluczyliśmy $\theta_1 = 0$, więc θ byłaby algebraiczna nad F co również wykluczyliśmy. Czyli $u'\theta_1 - \theta_1' \neq 0$ co pozwala przeprowadzić pozostałą część dowodu jak poprzednio. □

Definicja 0.4 *Funkcję wymierną nazywamy funkcją wymierną właściwą jeśli stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.*

Zauważmy że to czy wymierna jest funkcją wymierną właściwą nie zmienia się gdy pomnożymy lub podzielimy licznik i mianownik przez ten sam wielomian, bo tako operacja dodaje lub odejmuje tą samą liczbę od stopnia licznika i stopnia mianownika. A więc aby sprawdzić czy dana funkcja jest funkcją wymierną właściwą możemy użyć dowolny wygodny dla na zapis tej funkcji (nie trzeba używać zapisu nieskracalnego).

Lemat 0.5 *Funkcję wymierną można w dokładnie jeden sposób zapisać jako sumę funkcji wymiernej właściwej i wielomianu.*

Dowód: Niech $f = \frac{P}{S}$. Pisząc $P = QS + R$ gdzie Q jest ilowazem a R jest resztą z dzielenia P przez S dostanę

$$f = Q + \frac{R}{S}$$

Jako że stopień R jest mniejszy niż stopień S to $\frac{R}{S}$ jest funkcją wymierną właściwą, czyli otrzymaliśmy porządany rozkład. Odwrotnie, jeśli pewna funkcja f miałaby dwa różne rozkłady, to odejmując je otrzymalibyśmy rozkład $0 = Q + \frac{R}{S} = \frac{QS+R}{S}$ z niezerowym Q lub R. Ale wtedy $QS + R = 0$, czyli ponieważ stopiń R jest mniejszy niż stopień S i dzielenie z resztą dla wielomianów daje jednoznaczny wynik to $Q = 0$ i $R = 0$. Czyli przypuszczenie że są dwa różne rozkłady dla f prowadzi do sprzczności. □

Lemat 0.6 *Suma funkcji wymiernych właściwych i pochodna funkcji wymiernej właściwej jest funkcją wymierną właściwą.*

Dowód: Niech $f_1 = \frac{P}{Q}$ i $f_2 = \frac{R}{S}$. Wtedy

$$f_1 + f_2 = \frac{PS + QR}{QS}$$

Z założenia stopin P jest mniejszy niż stopień Q, wiec stopień PS jest mniejszy niż stopień QS. Podobnie stopin QR jest mniejszy niż stopień QS, a wiec stopień $PS + QR$ jest mniejszy niż stopień QS, co oznacza że $f_1 + f_2$ jest funkcją wymierną właściwą. Następnie

$$f_1' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Z lematu 5 stopień P' jest mniejszy lub równy niż stopień P, a więc mniejszy niż stopień Q. Czyli stopień $P'Q$ jest mniejszy niż stopień Q^2. Podobnie stopień PQ' jest mniejszy niż stopień Q^2, a wiec stopień $P'Q - PQ'$ jest mniejszy niż stopień Q^2 co oznacza że f_1' jest funkcją wymierną właściwą. $\square$

Lemat 0.7 *Jesli θ jest logarytmem lub eksponentą nad F, θ jest przestępna nad F, wszystkie stałe w $F(\theta)$ należą do F, $f \in F[\theta]$, i istnieją stałe c_i i $v_i \in F(\theta)$ takie że*

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$$

to istnieje $\tilde{v}_0 \in F[\theta]$ i $\tilde{v}_i \in F$, $i = 1, \ldots, m$ takie że

$$f = \tilde{v}_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\tilde{v}_i'}{\tilde{v}_i}.$$

Dowód: Najpierw rozważam $\theta = \log(u)$. Zapisuję v_i dla $i = 1, \ldots, m$ w postaci $a_i \frac{P_i}{Q_i}$ gdzie P_i i Q_i są wielomianami ze współczynnikiem przy najwyższej potędze równym 1. Na mocy Lematu 0.1 stopień P_i' jest mniejszy niż stopień P_i i stopień Q_i' jest mniejszy niż stopień Q_i. v_0 rozkładam na wielomian i funkcję wymierną właściwą, jak w Lemacie 0.5. Wtedy używając wzór na pochodną logarytmiczną iloczynu

$$f = Q_0' + \left(\frac{R}{S}\right)' + \sum c_i \left(\frac{a_i'}{a_i} + \frac{P_i'}{P_i} - \frac{Q_i'}{Q_i}\right)$$

$$= Q_0' + \sum c_i \frac{a_i'}{a_i} + \text{funkcja wymierna właściwa.}$$

Ponieważ na mocy Lematu 0.5 rozkład na sumę funkcji wymierną właściwej i wielomianu jest jednoznaczny to

$$f = Q_0' + \sum c_i \frac{a_i'}{a_i}$$

W równości wyżej używamy tu Lemat 0.6 by pokazać że $\left(\frac{R}{S}\right)'$ i suma jest funkcją wymierną właściwą. i suma jest funkcją wymierną właściwą).

Pozostaje teraz rozważyć $\theta = \exp(u)$. Funkcje v_i dla $i = 1, \ldots, l$ zapisuję w postaci

$$v_i = a_i \frac{P_i}{Q_i}$$

gdzie P_i i Q_i są wielomianami ze współczynnikiem przy najwyższej potędze równym 1. Tym razem stopień P_i' jest taki sam jak stopień P. Jednakże łatwo otrzymać rozkład $\frac{P_i'}{P_i}$ na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej. Mianowicie, jeśli stopień P_i to p_i to współczynnik przy najwyższej potędze θ w P_i' to $p_i u'$. Ponieważ stopienie P_i i P_i' są równe to dzielenie P_i' przez P_i daje $p_i u'$ jako iloraz. Podobnie jeśli stopień Q_i to q_i to dzielenie Q_i' przez Q_i daje $q_i u'$ jako iloraz. A więc używając jednoznaczność rozkładu na wielomian i funkcję wymierną właściwą otrzymuję równość

$$f = Q_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i\left(\frac{a_i'}{a_i} + p_i u' - q_i u'\right).$$

□

Lemat 0.8 *Jesli θ jest eksponentą nad F, θ jest przestępna nad F, wszystkie stałe w $F(\theta)$ należą do F, $f = g\theta$ dla pewnego $g \in F$ i f ma funkcję pierwotną w pewnym rozszerzenu elementarym F to istnieje $h \in F$ takie że $f = (h\theta)'$.*

Dowód: Na mocy twierdzenia Liouvilla-Ostrowskiego (gdzie jako ciało podstawowe bierzemy $F(\theta)$) istnieją stałe c_i i $v_i \in F(\theta)$ takie że

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}.$$

Z Lematu 0.7 wynika że $v_0 \in F[\theta]$ zaś suma członów logarytmicznych leży w F. Pisząc $v_0 = a + h\theta + \dots$ gdzie $a, h \in F$ a pominięte człony odpowiadają wyższym potęgom θ mamy

$$v_0' = a' + (h\theta)' + \dots$$

gdzie znowu pominęliśmy człony z wyższymi potęgami θ. Porównując wyrazy przy potęgach θ widzimy że

$$f = (h\theta)'$$

□

Definicja 0.9 *Eksponensem całkowym* $\mathrm{Ei}(z)$ *nazywamy funkcję taką że*

$$\mathrm{Ei}(z)' = \frac{\exp(z)}{z}$$

i

$$\lim_{x \to 0+} (\mathrm{Ei}(x) - \log(x)) = \gamma$$

gdzie γ jest stałą Eulera.

Funkcja taka istnieje, bo $\mathrm{Ei}(z) - \log(z)$ można zadać jako szereg potegowy zbieżny dla dowolnego zespolonego z (warunek z granicą ustala wyraz wolny szeregu).

Definicja 0.10 *Funkcją błędu* $\operatorname{erf}(z)$ *nazywamy funkcję taką że*

$$\operatorname{erf}(z)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$$

i $\operatorname{erf}(0) = 0$.

Lemat 0.11 *Ani* Ei *ani* erf *nie są funkcjami elementarnymi.*

Dowód. Na mocy Lematu 14 (twierdzenia Lioville'a-Ostrowskiego) gdby Ei było funkcją były elementarne to zachodziłaby równość

$$\frac{\exp(z)}{z} = (R(z)\exp(z))' = (R(z)' + R(z))\exp(z)$$

czyli

$$\frac{1}{z} = R(z)' + R(z)$$

Zauważmy że jeśli $R(z)$ ma w punkcie z_0 biegun rzędu k to $R(z)'$ ma w z_0 biegun rzędu $k+1$, a więc $R(z)' + R(z)$ ma w z_0 biegun rzędu $k+1$ (wynika to np. z rozkładu $R(z)$ na ułamki proste). Ale $\frac{1}{z}$ nie ma biegunów wielokotnych, czyli $R(z)$ nie może mieć biegunów, czyli $R(z)$ jest wielomianem. Ale $\frac{1}{z}$ ma biegun, więc równość jest niemożliwa. W przypadku erf otrzymalibyśmy równość

$$1 = R(z)' - 2zR(z)$$

Tak jak w przypadku Ei pokazujemy że R nie ma biegunów, więc jest wielomianem. Jeśli R jest stopnia m to $zR(z)$ zawiera z w potędze $m+1$. Najwyższa potęga z która się pojawia w R' to $m-1$ więc w $R(z)' - 2zR(z)$ pojawi się potęga $m+1$. Ale 1 jest stopnia 0, więc równość jest niemożliwa. $\square$