Reprezentacje grup skończonych

Andrzej Karolak, Maciej Korpalski, Rafał Łyżwa, Kamil Walter

1 Potrzebne pojęcia

Definicja 1.1. *__Pierścieniem__ $\mathbf{R}$ nazywamy trójkę $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, która spełnia warunki:*

- $(\mathbf{R}, +)$ *jest grupą abelową, której element neutralny oznaczamy* 0, *jest to* 0 *pierścienia* $\mathbf{R}$,
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
- $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$,

dla każdych $a, b, c \in \mathbf{R}$.
Pierścień nazywamy ***przemiennym****, gdy mnożenie jest przemienne.*
Pierścień jest ***z jednością****, gdy* $\cdot$ *ma element neutralny (nazywamy go* 1*).*

Mnożenie w pierścieniu najczęściej jest skracane z $a \cdot b$ do ab.

Definicja 1.2. ***Ideałem*** I *w pierścieniu* $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ *nazywamy zbiór spełniający następujące warunki:*

- $I \neq \emptyset$,
- $a + b \in I$,
- $r \cdot b \in I$,

dla dowolnych $a, b \in I$, $r \in \mathbf{R}$.

Definicja 1.3. *Pierścieniem* ***noetherowskim*** *nazywamy pierścień, w którym każdy ideał jest skończenie generowany. To znaczy, że istnieją* $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_1, ..., a_n \in R$ *takie, że* $I = \{r_1 \cdot a_1 + ... + r_n \cdot a_n : r_1, ..., r_n \in R\}$ *dla każdego* I.

Fakt 1.1. *Pierścień* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *jest pierścieniem noetherowskim.*

Definicja 1.4. *Niech* $\mathbf{R}$ *będzie pierścieniem przemiennym z jednością.*
Mówimy, że element $x \in \mathbf{R}$ *jest* ***całkowity nad podpierścieniem*** $\mathbf{Z}$*, gdy istnieje liczba naturalna* $n \geq 1$ *oraz elementy* $a_1, ..., a_n \in \mathbf{Z}$ *takie, że*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0.$$

Liczbę zespoloną całkowitą nad $\mathbb{Z}$ nazywamy całkowitą liczbą algebraiczną. Jest to mniejszy zbiór niż liczby algebraiczne, gdyż w definicji liczby algebraicznej wielomian nie musi być moniczny. Pierwiastki z jedynki dowolnego stopnia są całkowitymi liczbami algebraicznymi.

Fakt 1.2. *Jeśli liczba* $x \in \mathbb{Q}$ *jest całkowitą liczbą algebraiczną, to* $x \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Zapiszmy $x = \frac{p}{q}$ dla $p, q \in \mathbb{Z}$ względnie pierwszych. Skoro x jest całkowity nad $\mathbb{Z}$, to istnieją $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ takie, że
$$p^n + a_1 q p^{n-1} + ... + a_n q^n = 0.$$
Stąd $p \equiv 0(mod\ q)$, czyli $q = 1$. □

Definicja 1.5. *Niech $\mathbf{R}$ będzie pierścieniem (być może z jednością). Wtedy* ***modułem (lewostronnym)*** *nad $\mathbf{R}$ nazywamy strukturę $(\mathbf{M}, +, r)_{r \in \mathbf{R}}$ spełniającą warunki:*

- $(\mathbf{M}, +)$ *jest grupą abelową,*
- $r(m + n) = rm + rn$*,*
- $(r + s)m = rm + sm$*,*
- $r(sm) = (rs)m$*,*
- $1m = m$*, gdy* $1 \in \mathbf{R}$*,*

dla dowolnych elementów $r, s \in \mathbf{R}$ oraz $m, n \in \mathbf{M}$.

Definicja 1.6. *Niech $\mathbf{R}$ będzie pierścieniem, a $\mathbf{M}$ modułem nad $\mathbf{R}$.*
Mówimy, że $\mathbf{M}$ jest ***noetherowski****, gdy spełnia jeden z trzech równoważnych warunków:*

1. *Każdy podmoduł $\mathbf{M}$ jest skończenie generowany,*
2. *Każdy ściśle rosnący ciąg podmodułów $\mathbf{M}$ jest skończony,*
3. *Każda niepusta rodzina $\mathbf{S}$ podmodułów $\mathbf{M}$ posiada element maksymalny.*

Fakt 1.3. *Niech $\mathbf{M}$ będzie $\mathbf{R}$ modułem, a $\mathbf{N}$ jego podmodułem. Wtedy $\mathbf{M}$ jest noetherowski $\Leftrightarrow$ $\mathbf{N}$ oraz $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ są noetherowskie.*

Dowód.
($\Rightarrow$) Skoro $\mathbf{M}$ jest noetherowski, to z Definicji 1.6 $\mathbf{N}$ też. Pozostaje sprawdzić $\mathbf{M}/\mathbf{N}$.
Niech $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}/\mathbf{N}$ będzie kanonicznym homomorfizmem. Niech $\overline{\mathbf{M_1}} \subseteq \overline{\mathbf{M_2}} \subseteq ...$ będzie ciągiem podmodułów $\mathbf{M}/\mathbf{N}$. Niech $\mathbf{M_i} = f^{-1}[\overline{\mathbf{M_i}}]$.
Wtedy $\mathbf{M_1} \subseteq \mathbf{M_2} \subseteq ...$ jest rosnącym ciągiem podmodułow $\mathbf{M}$, więc musi on mieć element maksymalny. Oznaczmy go $\mathbf{M_r}$. Wtedy $\mathbf{M_i} = \mathbf{M_r}$ dla $i \geq r$. Dodatkowo $f[\mathbf{M_i}] = \overline{\mathbf{M_i}}$, więc $\overline{\mathbf{M_r}}$ jest elementem maksymalnym pierwszego ciągu.
($\Leftarrow$) Każdemu $\mathbf{L}$ podmodułowi $\mathbf{M}$ przyporządkowujemy parę modułów
$$h : \mathbf{L} \to (\mathbf{L} \cap \mathbf{N}, (\mathbf{L} + \mathbf{N})/\mathbf{N}).$$
(*) Jeśli $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{F}$ są dwoma podmodułami $\mathbf{M}$, takimi że $h(\mathbf{E}) = h(\mathbf{F})$, to $\mathbf{E} = \mathbf{F}$.
Niech $x \in \mathbf{F}$. Skoro $(\mathbf{E} + \mathbf{N})/\mathbf{N} = (\mathbf{F} + \mathbf{N})/\mathbf{N}$, to istnieją $u, v \in \mathbf{N}$ oraz $y \in \mathbf{E}$, takie że $y + u = x + v$. Wtedy $x - y = u - v \in \mathbf{F} \cap \mathbf{N} = \mathbf{E} \cap \mathbf{N}$. Skoro $y \in \mathbf{E}$, to $x \in \mathbf{E}$.
Niech $\mathbf{E_1} \subseteq \mathbf{E_2} \subseteq ...$ będzie ciągiem podmodułów $\mathbf{M}$. $h[\mathbf{E_i}]$ tworzą rosnące ciągi podmodułów w $\mathbf{N}$ oraz $\mathbf{M}/\mathbf{N}$. Z założenia ciągi te muszą się stabilizować, więc z (*) $\mathbf{E_1} \subseteq \mathbf{E_2} \subseteq ...$ też musi się stabilizować □

Fakt 1.4. *Niech $\mathbf{R}$ będzie pierścieniem noetherowskim, a $\mathbf{M}$ skończenie generowanym $\mathbf{R}$ modułem. Wtedy $\mathbf{M}$ jest noetherowski.*

Dowód. Na początku udowodnimy następujący lemat:

Lemat 1.1. *Jeżeli $\mathbf{M}$ jest $\mathbf{R}$ modułem, a $\mathbf{N}$ i $\mathbf{N}'$ są jego podmodułami noetherowskimi, spełniającymi $\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{N}'$, to $\mathbf{M}$ jest noetherowski.*

Dowód. Zauważmy, że $\mathbf{N} \times \mathbf{N}'$ jest modułem noetherowskim. $\mathbf{N} \times \mathbf{N}'$ zawiera $\mathbf{N}$ jako podmoduł, którego moduł ilorazowy jest izomorficzny z $\mathbf{N}'$, zatem z Faktu 1.3 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}'$ jest noetherowski.
Definiujemy epimorfizm $h : \mathbf{N} \times \mathbf{N}' \to \mathbf{M}$ wzorem $h(x, x') = x + x'$. Z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie modułów $\mathbf{M} \cong (\mathbf{N} \times \mathbf{N}')/\text{ker}(h)$, ale z Faktu 1.3 $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}')/\text{ker}(h)$ jest noetherowski. □

Przez indukcję możemy pokazać, że lemat jest prawdziwy dla dowolnej, skończonej sumy (lub produktu) modułów.

Niech $x_1, ..., x_n$ będą generatorami $\mathbf{M}$. Definiujemy epimorfizm $f : \prod_{i=1}^{n} \mathbf{R} \to \mathbf{M}$ wzorem $f(a_1, ..., a_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$. Skoro $\mathbf{R}$ jest noetherowski, to jest też noetherowskim modułem nad samym sobą. Zatem tak jak w lemacie otrzymujemy, że $\mathbf{M}$ jest noetherowski. □

2 Reprezentacje liniowe grup skończonych

2.1 Podstawowe wiadomości

Definicja 2.1. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{K}$, a GL(V) oznacza grupę automorfizmów przestrzeni V. Załóżmy, że G jest skończoną grupą.*
***Reprezentacją liniową** grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy homomorfizm ϱ grupy G w grupę GL(V)*

Gdy dana jest reprezentacja $\varrho : G \to \text{GL}(V)$ mówimy, że

1. V jest przestrzenią reprezentacji (lub po prostu reprezentacją)
2. dim(V) jest stopniem reprezentacji
3. dla $s \in G$ przekształcenie $\varrho(s)$ oznaczamy ϱ_s
4. dla skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V i jej bazy (e_i) macierz przekształcenia ϱ_s w tej bazie oznaczamy R_s

Uwaga 2.1. *Niech rodzina $\{R_s : s \in G\}$ będzie zbiorem macierzy, które spełniają:*

(i) $\forall s \in G$ *det*$(R_s) \neq 0$

(ii) $\forall s, t \in G$ $R_s R_t = R_{st}$

Wtedy macierze definiują reprezentację liniową grupy G w przestrzeni liniowej V. Taką definicję nazywamy zadaniem reprezentacji w postaci macierzowej.

Definicja 2.2. *Niech ϱ, ϱ' będą reprezentacjami tej samej grupy G w przestrzeniach liniowych V, V' odpowiednio.*
*Mówimy, że reprezentacje te są **równoważne** (lub **izomorficzne**), gdy istnieje izomorfizm liniowy $\tau : V \to V'$, który dla każdego $s \in G$ spełnia $\tau \circ \varrho_s = \varrho'_s \circ \tau$.*
W przypadku gdy reprezentacje ϱ, ϱ' są zadane w postaci macierzowej oznacza to, że istnieje odwracalna macierz T, taka że dla każdego elementu $s \in G$ zachodzi $T \cdot R_s = R'_s \cdot T$.

Przykład 2.1.

1. *Reprezentacją stopnia 1 grupy G jest homomorfizm $\varrho : G \to \mathbb{C}^*$. Ponieważ każdy element G ma rząd skończony to $\varrho(x)$ są pierwiastkami z 1.*

2. *Niech g będzie rzędem grupy G, a V g-wymiarową przestrzenią liniową o bazie $(e_t)_{t \in G}$. Dla elementu $s \in G$ definiujemy przekształcenie ϱ_s na bazie: $\varrho_s(e_t) = e_{st}$. Można sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób reprezentację liniową, którą nazywamy* ***reprezentacją regularną*** *grupy G.*

3. *Grupa G działa na skończonym zbiorze X. Niech V będzie przestrzenią liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Niech funkcja $\varrho_s : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, takim że $\varrho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy wtedy reprezentacje liniową nazywaną* ***reprezentacją permutacyjną*** *stowarzyszoną z X.*

Definicja 2.3. *Niech $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową, a podprzestrzeń liniowa $W < V$ będzie niezmiennicza na działanie grupy G. Dla każdego elementu $s \in G$ przekształcenie $\varrho_s|_W$ jest wtedy automorfizmem przestrzeni W. Funkcja*

$$\varrho^W : G \to GL(W), \quad \varrho_s^W(x) = \varrho_s|_W(x)$$

jest wtedy reprezentacją liniową podprzestrzeni W, którą nazywamy ***podreprezentacją*** *reprezentacji ϱ.*

Przykład 2.2. *Niech przestrzeń liniowa V będzie reprezentacją regularną G, a W będzie jednowymiarową podprzestrzenią przestrzeni V generowaną przez $x = \sum_{s \in G} e_s$. Wtedy $\varrho_s(x) = x$ dla każdego $s \in G$, czyli przestrzeń W jest podreprezentacją reprezentacji V (izomorficzna z trywialną).*

Twierdzenie 2.1. *Przypuśćmy, że przekształcenie $\varrho : G \to GL(V)$ jest reprezentacją liniową grupy G oraz podprzestrzeń $W < V$ jest niezmiennicza względem działania G. Dodatkowo załóżmy, że rząd grupy $g = |G|$ nie dzieli charakterystyki $char(\mathbf{K})$. Wówczas istnieje dopełnienie W^0 przestrzeni W niezmiennicze względem działania G.*

Dowód.

Niech przestrzeń W' będzie dowolnym dopełnieniem W w V,a funkcja $p : V \to V$ rzutem V na W odpowiadającym W'.
Konstruujemy "średnią" p^0 przekształceń powstałych z p:

$$p^0 = \frac{1}{r} \sum_{t \in G} \varrho_t p \varrho_t^{-1}.$$

Ponieważ p przekształca V w W i ϱ_t zachowują W, to p^0 przekształca V w W. Ponadto dla elementu $x \in W$ zachodzi

$$p \cdot \varrho_t^{-1}(x) = \varrho_t^{-1}(x) \Rightarrow \varrho_t p \varrho_t^{-1}(x) = x \Rightarrow p^0(x) = x,$$

czyli p^0 jest rzutowaniem V na W. Niech przestrzeń W^0 będzie odpowiadającym mu dopełnieniem.
Przestrzeń W^0 jest G-niezmiennicza, ponieważ dla każdego $s \in G$ mamy: $\varrho_s p^0 = p^0 \varrho_s$, więc dla $x \in W^0$ zachodzi $p^0 \varrho_s(x) = \varrho_s p^0(x) = 0$, zatem $\varrho_s(x) \in W^0$. □

Uwaga 2.2. *Jeżeli w przestrzeni liniowej V określony jest iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle$, który jest G niezmienniczy (można sobie to zagwarantować zastępując $\langle x, y \rangle$ przez $\sum_{t \in G} \langle \varrho_t x, \varrho_t y \rangle$), to dopełnienie ortogonalne W^0 podprzestrzeni W jest niezmiennicze na G.*

Definicja 2.4. *Założenia i oznaczenia pochodzą z Twierdzenia 2.1.*
Niech $V \ni x = w + w^0$, gdzie $w \in W$, $w^0 \in W^0$. Wtedy $\varrho_s x = \varrho_s w + \varrho_s w^0$.
Przestrzenie W i W^0 są G-niezmiennicze, zatem $\varrho_s w \in W$ i $\varrho_s w^0 \in W^0$ są rzutami wektora $\varrho_s x$.
Stąd jeśli znamy reprezentacje W i W^0, to znamy też reprezentację V.
Mówimy wtedy, że V jest ***sumą prostą reprezentacji*** *W i W^0 i oznaczamy ją przez $W \oplus W^0$.*

Jeżeli przekształcenia ϱ_s^W i $\varrho_s^{W^0}$ są zadane w postaci macierzowej przez R_s i R_s^0, to przekształcenie $\varrho_s^{W \oplus W^0}$ jest zadane przez macierz

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

Podobnie definiujemy sumę prostą dowolnej skończonej liczby reprezentacji.

2.2 Reprezentacje nieprzywiedlne

Definicja 2.5. *Niech przekształcenie $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową.*
Mówimy, że reprezentacja jest ***nieprzywiedlna*** *(lub* ***prosta****), gdy przestrzeń V jest niezerowa i żadna właściwa podprzestrzeń V nie jest G-niezmiennicza.*

Uwaga 2.3.

1. *Na podstawie Twierdzenia 2.1 drugi warunek jest równoważny temu, że V nie jest nietrywialną sumą prostą dwóch reprezentacji.*
2. *Każda reprezentacja stopnia 1 jest nieprzywiedlna.*

Twierdzenie 2.2. *Załóżmy, że rząd $g = |G|$ nie dzieli charakterystyki $char(\mathbf{K})$ oraz $\dim(V) < \infty$. Wtedy reprezentacja $\varrho : G \to GL(V)$ jest nieprzywiedlna lub rozkłada się na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.*

Dowód. Indukcja względem wymiaru $\dim(V)$:

- Dla $\dim(V) = 1$ własność wynika z definicji
- Gdy $\dim(V) = n > 1$ mamy dwa przypadki:
  1. V jest nieprzywiedlna
  2. Możemy rozbić V na nietrywialną sumę prostą $V_1 \oplus V_2$ (na mocy Twierdzenia 2.1).
     Wtedy $\dim(V_1)$, $\dim(V_2)$<n. Z założenia indukcyjnego mamy: $V_j = \bigoplus_{i=1}^{k_j} W_{ij}$ dla $j = 1, 2$ gdzie W_{ij} są nieprzywiedlne. Wtedy $V = \bigoplus_{i=1}^{k_1} W_{i1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_2} W_{i2}$.

□

Uwaga 2.4. *Rozkład reprezentacji na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych nie musi być jednoznaczny, na przykład: $\forall s \in G$ $\varrho_s = id_V$. Mamy wiele rozkładów V na sumę prostą jednowymiarowych podprzestrzeni.*

2.3 Iloczyn tensorowy reprezentacji

Definicja 2.6. *Niech $V_1 \otimes V_2$ będzie iloczynem tensorowym przestrzeni liniowych V_1, V_2 i niech $\varrho_s^1 : G \to GL(V_1)$, $\varrho_s^2 : G \to GL(V_2)$ będą reprezentacjami liniowymi.*
Dla $s \in G$ definiujemy $\varrho_s \in GL(V_1 \otimes V_2)$ następująco:

$$\varrho_s(x_1 \otimes x_2) = \varrho_s^1(x_1) \otimes \varrho_s^2(x_2)$$

Piszemy wówczas $\varrho_s = \varrho_s^1 \otimes \varrho_s^2$, a $V_1 \otimes V_2$ nazywamy iloczynem tensorowym reprezentacji.
W postaci macierzowej:
(e_{i_1}) - baza V_1, $(r_{i_1,j_1}(s))$ - macierz ϱ_s^1 w tej bazie. Analogicznie (e_{i_2}), $(r_{i_2,j_2}(s))$. Ze wzorów

$$\varrho_s^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1,j_1}(s) e_{i_1}$$

$$\varrho_s^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2,j_2}(s)e_{i_2}$$

wynika

$$\varrho_s^1(e_{j_1} \otimes e_{j_2}) = \sum_{i_1,j_2} r_{i_1,j_1}(s) \otimes r_{i_2,j_2}(s)(e_{i_1} \otimes e_{i_2})$$

czyli przekształcenie ϱ_s ma macierz $(r_{i_1,j_1}(s) \otimes r_{i_2,j_2}(s))$

Definicja 2.7 (Druga potęga symetryczna i druga potęga wewnętrzna)**.**

Niech ciąg (e_i) będzie bazą przestrzeni liniowej V. Niech Θ będzie automorfizmem $V \otimes V$, takim że $\Theta(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$ dla wszystkich par (i,j). Wtedy $\Theta(x \otimes y) = y \otimes x$, a zatem automorfizm Θ jest niezależny od wyboru bazy, ponadto $\Theta^2 = Id_{V \otimes V}$.
Przestrzeń $V \otimes V$ rozkłada się na sumę prostą

$$V \otimes V = Sym^2(V) \oplus Alt^2(V)$$

gdzie

$$Sym^2(V) = \{z \in V \otimes V : \Theta(z) = z\} \text{ z bazą } (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$$
$$\text{i } Alt^2(V) = \{z \in V \otimes V : \Theta(z) = -z\} \text{ z bazą } (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$$

są niezmiennicze względem G, więc definiują reprezentacje liniowe tej grupy.
$Sym^2(V)$ nazywamy ***drugą potęga symetryczną****, a $Alt^2(V)$* ***drugą potęgą zewnętrzną*** *reprezentacji V.*
Dla $\dim(V) = n$ mamy: $\dim(Sym^2(V)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(Alt^2(V)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

3 Teoria charakterów

Definicja 3.1. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{K}$, $\dim(V) = n$ i niech $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową.*
Charakterem reprezentacji *ϱ nazywamy funkcję $\chi_\varrho : G \to K$, $\chi_\varrho(s) = Tr(\varrho_s)$.*
Będziemy oznaczać χ zamiast χ_ϱ.

Przykład 3.1. *$V = \mathbb{R}^3$, baza:* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dla $\varrho : S_3 \to GL(\mathbb{R}^3)$, $\varrho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ mamy: $\chi(id) = 3$, $\chi((i,j)) = 1$, $\chi((i,j,k)) = 0$

Fakt 3.1.

1. *Jeśli $\dim(V) = n$, to $\chi(e) = n$*
2. *Jeśli $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, to $\forall s \in G\ \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$*
3. *$\forall t, s \in G \quad \chi(tst^{-1}) = \chi(s)$*

Dowód.

1. $\varrho_e = \mathrm{Id}_V$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = n$
2. Grupa G jest skończona, więc $(\varrho_s)^{|G|} = \varrho_{s^{|G|}} = \varrho_e = \mathrm{Id}_V$. Stąd

$$R_s = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

gdzie $P \in \mathsf{GL}(V), |\lambda_i| = 1$ (bo $\lambda_i^{|G|} = 1$). Zatem:

$$\overline{\chi(s)} = \overline{\mathsf{Tr}(\varrho_s)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \mathsf{Tr}(\varrho_s^{-1}) = \mathsf{Tr}(\varrho_{s^{-1}}) = \chi(s^{-1})$$

3. Ślad jest niezmienniczy na zamianę bazy.

□

Fakt 3.2. *Niech $\varrho_1 : G \to GL(V_1), \varrho_2 : G \to GL(V_2)$ będą reprezentacjami liniowymi, a χ_1, χ_2 ich charakterami. Wtedy:*

1. *Charakter χ sumy prostej $V_1 \oplus V_2$ jest równy $\chi_1 + \chi_2$*
2. *Charakter ψ iloczynu tensorowego $V_1 \otimes V_2$ jest równy $\chi_1 \cdot \chi_2$*

Dowód. Niech ϱ_1, ϱ_2 będą dane w postaci macierzowej R_s^1, R_s^2

1. Reprezentacja $V_1 \oplus V_2$ ma postać macierzową $R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}$.

   Stąd $\mathsf{Tr}(R_s) = \mathsf{Tr}(R_s^1) + \mathsf{Tr}(R_s^2)$, czyli $\chi = \chi_1 + \chi_2$.
2. $\chi_1(s) = \sum_i (R_s^1)_{i,i}$, $\chi_2(s) = \sum_j (R_s^2)_{j,j}$, więc $\psi(s) = \sum_{i,j} (R_s^1)_{i,i} (R_s^2)_{j,j} = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s)$.

□

Fakt 3.3. *Niech $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową G w przestrzeni liniowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym. Przez χ oznaczmy charakter ϱ. Niech χ_σ^2 będzie charakterem drugiej potęgi symetrycznej Sym$^2(V)$, a χ_α^2 charakterem drugiej potęgi zewnętrznej Alt$^2(V)$. Wtedy dla każdego $s \in G$ mamy*

$$\chi_\sigma^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 + \chi(s^2))$$

$$\chi_\alpha^2(s) = \frac{1}{2}(\chi(s)^2 - \chi(s^2))$$

oraz

$$\chi_\sigma^2 + \chi_\alpha^2 = \chi^2.$$

Dowód. Tak jak w dowodzie Faktu 3.1 możemy pokazać, że dla $s \in G$ istnieje baza $(e_i) \subseteq V$, taka że e_i są wektorami własnymi ϱ_s. Wówczas $\varrho_s(e_i) = \lambda_i e_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbf{K}$. Mamy $\chi(s) = \sum \lambda_i$ oraz $\chi(s^2) = \sum \lambda_i^2$. Z drugiej strony mamy:

$$\varrho_s \otimes \varrho_s(e_i e_j + e_j e_i) = \varrho_s \otimes \varrho_s(e_i e_j) + \varrho_s \otimes \varrho_s(e_j e_i) = \lambda_i \lambda_j (e_i e_j + e_j e_i)$$

$$\varrho_s \otimes \varrho_s(e_i e_j - e_j e_i) = \lambda_i \lambda_j (e_i e_j - e_j e_i).$$

Stąd

$$\chi_\sigma^2(s) = \sum_{i \le j} \lambda_i \lambda_j = \sum_i \lambda_i^2 + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}(\sum_i \lambda_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2$$

$$\chi_\alpha^2(s) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}(\sum_i \lambda_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2.$$

□

Fakt 3.4. *Jeżeli χ, χ' są charakterami dwóch różnych reprezentacji w przestrzeni liniowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym, to wtedy:*

$$(\chi + \chi')^2_\sigma = \chi^2_\sigma + \chi'^2_\sigma + \chi\chi'$$

$$(\chi + \chi')^2_\alpha = \chi^2_\alpha + \chi'^2_\alpha + \chi\chi'$$

Dowód. Niech $\varrho : G \to \mathsf{GL}(V)$, $\varrho' : G \to \mathsf{GL}(V)$ będą reprezentacjami liniowymi o charakterach χ oraz χ' odpowiednio. Stosujemy Fakt 3.3 do prezentacji $(\varrho + \varrho') \otimes (\varrho + \varrho') : G \to \mathsf{GL}((V \oplus V) \otimes (V \oplus V))$. □

Twierdzenie 3.1 (Lemat Schura)**.** *Niech $\varrho^1 : G \to GL(V_1)$, $\varrho^2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G i niech $f : V_1 \to V_2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $\varrho^2_s \circ f = f \circ \varrho^1_s$ dla każdego $s \in G$. Wówczas:*

1. *Jeśli $f \neq 0$ to ϱ^1 i ϱ^2 są izomorficzne.*
2. *Jeśli ciało $\mathbf{K}$ jest algebraicznie domknięte, $V_1 = V_2$ i $\varrho_1 = \varrho_2$, to f jest jednokładnością.*

Dowód.

1. Niech $x \in \mathsf{ker}(f)$. Wtedy $f(\varrho^1_s(x)) = \varrho^2_s(f(x)) = \varrho^2_s(0) = 0$, więc $\varrho^1_s(x) \in \mathsf{ker}(f)$. Stąd $\mathsf{ker}(f)$ jest niezmiennicza na działanie grupy G. Ale V_1 jest nieprzywiedlna oraz $f \neq 0$, więc $\mathsf{ker}(f) = \{0\}$. Stąd f jest $1-1$. Podobnie f jest na. Zatem f jest izomorfizmem.
2. Niech λ będzie wartością własną f. Taka istnieje, bo ciało skalarów jest algebraicznie domknięte. Oznaczmy $f' = f - \lambda$. Wtedy $\mathsf{ker}(f') \neq \{0\}$. Dodatkowo $\varrho^2_s \circ f' = f' \circ \varrho^1_s$, ale to oznacza, że $f' = 0$. Stąd $f(x) = \lambda x$ dla każdego $x \in V_1$.

□

Wniosek 3.1. *Założenia jak w twierdzeniu 3.1. Ponadto niech $char(\mathbf{K}) \nmid |G|$ i $h : V_1 \to V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Przyjmijmy $h^0 = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(\varrho^2_t)^{-1}h(\varrho^1_t)$. Wówczas:*

1. *Jeśli $h^0 \neq 0$, to ϱ^1 i ϱ^2 są izomorficzne.*
2. *Jeśli $\mathbf{K}$ jest algebraicznie domknięte, $V_1 = V_2$ i $\varrho^1 = \varrho^2$, to h^0 jest jednokładnością o współczynniku $\frac{1}{n}$ Tr(h), gdzie $n = $ dim(V).*

Dowód. Mamy $\varrho^2_s \circ h^0 = h^0 \circ \varrho^1_s$, bo:

$$(\varrho^2_s)^{-1}h^0(\varrho^1_s) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(\varrho^2_s)^{-1}(\varrho^2_t)^{-1}h(\varrho^1_t)(\varrho^1_s) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(\varrho^2_{ts})^{-1}h(\varrho^1_{ts}) = h^0,$$

więc stosując Twierdzenie 3.1 dla $f = h^0$ otrzymujemy, że w przypadku (1) reprezentacje są izomorficzne, a w przypadku (2) h^0 jest jednokładnością o współczynniku λ. W drugim przypadku zachodzi:

$$\mathsf{Tr}(h^0) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\mathsf{Tr}((\varrho^1_t)^{-1}h(\varrho^1_t)) = \mathsf{Tr}(h)$$

Dodatkowo $\mathsf{Tr}(h^0) = n\lambda$, więc $\lambda = \frac{\mathsf{Tr}(h)}{n}$. □

Uwaga 3.1. *Stosując notację macierzową:* $\varrho_t^1 = (R_t^1)_{i_1 j_1}$, $\varrho_t^2 = (R_t^2)_{i_2 j_2}$. *Przekształcenie liniowe* h *określamy macierzą* $(x_{i_2 i_1})$, *a* h^0 *macierzą* $(x^0_{i_2 i_1})$. *Wtedy mamy*

$$x^0_{i_2 i_1} = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(R_t^2)_{i_1 j_1} x_{j_2 j_1}(R_t^1)_{j_1 i_1}$$

Suma po prawej stronie jest formą liniową względem $x_{j_2 j_1}$. *W przypadku, gdy* ϱ^1 *i* ϱ^2 *nie są izomorficzne to z (1) forma ta zanika dla każdego układu* $x_{j_2 j_1}$. *Stąd otrzymujemy:*

Wniosek 3.2. *Jeżeli* ϱ^1 *i* ϱ^2 *nie są izomorficzne, to*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(R^2_{t^{-1}})_{i_2 j_2}(R^1_t)_{j_1 i_1} = 0 \quad \textit{dla dowolnych} \quad i_1, i_2, j_1, j_2$$

Podobnie dla $h^0 = \lambda$ *mamy:*

$$x^0_{i_2, i_1} = \begin{cases} \lambda \text{ dla } i_1 = i_2 \\ 0 \text{ dla } i_1 \neq i_2 \end{cases} \quad \text{, gdzie} \quad \lambda = \frac{1}{n} Tr(h).$$

Niech

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } i = j \\ 0, \text{ gdy } i \neq j \end{cases} \quad \text{, wtedy} \quad \lambda = \frac{1}{n}\sum_{j_2, j_1}\delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1}.$$

Wynika stąd

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t, j_1, j_2}(R^2_{t^{-1}})_{i_2 j_2} x_{j_2 j_1}(R^1_t)_{j_1 i_1} = \frac{1}{n}\sum_{j_1, j_2}\delta_{j_2 j_1}\delta_{i_2 i_1} x_{j_2 j_1}.$$

Porównując współczynniki przy $x_{j_2 j_1}$ *otrzymujemy:*

Wniosek 3.3. *Jeśli* $V_1 = V_2$, $\varrho^1 = \varrho^2$, *to*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t}(R^2_{t^{-1}})_{i_2 j_2}(R^1_t)_{j_1 i_1} = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}$$

Definicja 3.2. *Dla funkcji* ϕ, ψ *na grupie* G *definiujemy*

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\phi(t^{-1})\psi(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\phi(t)\psi(t^{-1})$$

Fakt 3.5. *Dla tak zdefiniowanego* $\langle \, , \rangle$ *mamy:*

1. $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$
2. $\langle \phi, \psi \rangle$ *zależy liniowo od* ϕ *i* ψ

Używając $\langle \, , \rangle$ we wnioskach 3.2 i 3.3 możemy napisać:

$$\langle R_{i_2 j_2}, R_{j_1 i_1}\rangle = 0 \; , \; \langle R_{i_2 j_2}, R_{j_1 i_1}\rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}$$

Uwaga 3.2. *Załóżmy, że* V *jest przestrzenią liniową nad* $\mathbb{C}$ *i macierze* $(R_t)_{ij}$ *są unitarne. Wówczas zachodzi* $(R_{t^{-1}})_{ij} = (R_t)_{ji}$, *a Wnioski 3.2 i 3.3 wyrażają relację ortogonalności względem pewnego iloczynu skalarnego.*

Definicja 3.3. *Niech $\phi, \psi : G \to \mathbb{C}$. Wtedy przyjmujemy $(\phi, \psi) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\phi(t)\overline{\psi(t)}$.*
Jest to iloczyn skalarny liniowy względem ϕ, półliniowy względem ψ i spełniający $\langle\phi, \phi\rangle > 0$ dla $\phi \neq 0$.
Jeżeli $\tilde{\psi}(t) = \overline{\psi(t^{-1})}$, to $(\phi, \psi) = \langle\phi, \tilde{\psi}\rangle$.

Uwaga 3.3. *Jeżeli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to na mocy Faktu 3.1 (2) $\tilde{\chi} = \chi$, stąd dla każdej funkcji $\phi : G \to \mathbb{C}$ mamy $(\phi, \chi) = \langle\phi, \chi\rangle$. Zatem dla charakterów możemy zamiennie używać $(\, ,)$ oraz $\langle \, , \rangle$.*

Twierdzenie 3.2.

1. *Jeżeli χ jest charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej, to $\langle\chi, \chi\rangle = 1$ (czyli χ "ma długość 1").*

2. *Jeżeli χ, χ' są charakterami dwóch nieizomorficznych reprezentacji, to $\langle\chi, \chi'\rangle = 0$ (czyli χ i χ' są prostopadłe)*

Dowód.

1. Niech ϱ będzie reprezentacją nieprzywiedlną o charakterze χ daną w postaci $\varrho_t = (R_t)_{ij}$.
Wtedy $\chi(t) = (R_t)_{ii}$. Stąd wynika, że $\langle\chi, \chi\rangle = \sum_{i,j}\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle$. Z Wniosku 3.3 otrzymujemy, że $\langle\chi, \chi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i,j}\delta_{ij} = \frac{n}{n} = 1$

2. Stosujemy Wniosek 3.2 i otrzymujemy, że $\langle\chi, \chi'\rangle = \sum_{i,j}\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle = 0$.

□

Definicja 3.4. ***Charakterem nieprzywiedlnym*** *nazywamy charakter reprezentacji nieprzywiedlnej.*

Twierdzenie 3.3. *Niech V będzie skończenie wymiarową reprezentacją liniową grupy G o charakterze χ. Załóżmy, że $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$, gdzie V_i to reprezentacje nieprzywiedlne o charakterach χ_i.*
Niech W będzie reprezentacją nieprzywiedlną o charakterze χ'. Wtedy W jest izomorficzna z dokładnie $\langle\chi, \chi'\rangle$ reprezentacjami spośród V_i.

Dowód. Mamy $\chi = \chi_1 + ... + \chi_n$. Stąd $\langle\chi, \chi'\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\chi_i, \chi'\rangle$. Na mocy Faktu 3.2 $\langle\chi_i, \chi'\rangle$ jest równy 0, gdy reprezentacje nie są izomorficzne i 1, gdy są. □

Wniosek 3.4. *Liczba reprezentacji V_i izomorficznych z W nie zależy od wyboru rozkładu (czyli rozkład jest "jedyny").*

Wniosek 3.5. *Jeżeli dwie reprezentacje mają takie same charaktery, to są izomorficzne.*

Uwaga 3.4. *Powyższy wniosek pozwala sprowadzić badanie reprezentacji do badania ich charakterów.*

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli χ jest charakterem reprezentacji V, to $\langle\chi, \chi\rangle \geqslant 0$ jest liczbą całkowitą. Ponadto $\langle\chi, \chi\rangle = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy V jest nieprzywiedlna.*

Dowód. Niech $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, gdzie V_i jest nieprzywiedlna o charakterze χ_i. Mamy $\langle\chi, \chi\rangle = \sum_{i,j}^{n}\langle\chi_i, \chi_j\rangle$. Skoro $\langle\chi_i, \chi_j\rangle \in \{0, 1\}$, to $\langle\chi, \chi\rangle$ jest nieujemną liczbą całkowitą. Jeśli $\langle\chi, \chi\rangle = 1$, to jeden ze składników jest równy 1, a pozostałe są równe 0. Oczywiście $\langle\chi_i, \chi_i\rangle = 1$, więc $V = V_i$, zatem V jest nieprzywiedlna.
□

4 Zliczanie reprezentacji nieprzywiedlnych

Definicja 4.1. *Funkcję f określoną na grupie G nazywamy **centralną**, gdy dla każdych $s, t \in G$ zachodzi $f(s) = f(tst^{-1})$.*

Oznaczenie:
Dla dowolnej funkcji f określonej na grupie, przez f^* oznaczamy funkcję określoną na tej samej grupie, zadaną wzorem
$$f^*(s) := f(s^{-1}).$$

Twierdzenie 4.1. *Niech $f : G \to \mathbb{C}$ będzie funkcją centralną, V przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$, a $\varrho : G \to GL(V)$ reprezentacją liniową grupy G. Niech $\varrho_f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym określonym wzorem $\varrho_f = \sum_{t\in G} f(t)\varrho_t$.*
Jeżeli V jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ϱ_f jest jednokładnością o współczynniku
$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{|G|}{n}\langle f, \chi^*\rangle.$$

Dowód. Sprawdzamy założenia lematu Schura (Twierdzenie 3.1) dla ϱ_f. Mamy
$$\varrho_s^{-1}\varrho_f\varrho_s = \sum_{t\in G} f(t)\varrho_s^{-1}\varrho_t\varrho_s = \sum_{t\in G} f(t)\varrho_{s^{-1}ts}$$
Dla $u = s^{-1}ts$ mamy
$$\sum_{u\in G} f(sus^{-1})\varrho_u = \sum_{u\in G} f(u)\varrho_u = \varrho_f$$
Stąd $\varrho_f \circ \varrho_s = \varrho_s \circ \varrho_f$. Z lematu Schura wynika, że ϱ_f jest jednokładnością o współczynniku λ. Mamy $\mathrm{Tr}(\varrho_f) = n\lambda$ oraz $\mathrm{Tr}(\varrho_f) = \sum_{t\in G} f(t)\mathrm{Tr}(\varrho_t) = \sum_{t\in G} f(t)\chi_t$. Stąd $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t)$. □

Definicja 4.2. *Niech $H = \{f : G \to \mathbb{C} : f$ jest centralna$\}$. H z $+$ i $\cdot$ punktowym jest przestrzenią liniową.*

Twierdzenie 4.2. *Niech $\chi_1, ..., \chi_n$ będą wszystkimi nieprzywiedlnymi charakterami grupy G.*
Wtedy $\chi_1, ..., \chi_n$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H.

Twierdzenie 4.3. *Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G jest równa liczbie klas sprzężoności G.*

Dowód. Niech $C_1, ..., C_k$ będą różnymi klasami sprzężoności G. Funkcja f jest centralna wtedy i tylko wtedy, gdy jest stała na każdej klasie sprzężoności. Funkcja f jest określona przez wartości λ_i na C_i. Stąd $\dim(H) = k$, ale na mocy twierdzenia 4.2 $\dim(H) =$ liczba reprezentacji nieprzywiedlnych G. □

Fakt 4.1. *Niech $s \in G$, Jako $C(s)$ oznaczymy liczbę elementów w klasie sprzężoności s, a jako h liczbę klas sprzężoności G. Wtedy:*

1. *$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) = \frac{|G|}{C(s)}$. W szczególności dla $s = e$ mamy, że rząd grupy jest równy sumie kwadratów stopni reprezentacji nieprzywiedlnych*
2. *Jeśli $t \in G$ nie należy do klasy sprzężoności s, to $\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = 0$*

Dowód. Niech
$$f_s : G \to \mathbb{C},\ f_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli x i s są sprzężone} \\ 0, & \text{jeżeli x i s nie są sprzężone} \end{cases}$$

Funkcja f_s jest centralna, czyli $f_s \in H$. Zatem

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i, \ \ \lambda_i = \langle f_s, \chi_i \rangle = \frac{C(s)}{|G|}\overline{\chi_i(s)}$$

Stąd

$$f_s(t) = \frac{C(S)}{|G|} \sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t)$$

Dla $t = s$ mamy (1), a dla t, które nie jest sprzężone z s otrzymujemy (2). $\square$

Przykład 4.1. *Niech $G = S_3$. Mamy $|G| = 6$. W G są trzy klasy sprzężoności:*

$$\{id\}, \{(1,2),(1,3),(2,3)\}, \{(1,2,3),(1,3,2)\}$$

Niech t będzie transpozycją, a c cyklem długości 3. Z twierdzenia 4.3 mamy 3 charaktery nieprzywiedlne. Pierwsze dwa to χ_1 - trywialny i χ_2 - przypisujący permutacji jej znak. Niech χ_3 będzie trzecim charakterem, a n jego stopniem. Wtedy z faktu 4.1 mamy $1 + 1 + n^2 = 6$. Stąd $n = 2$. Dodatkowo $\chi := \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$ jest charakterem reprezentacji regularnej. Stąd otrzymujemy, że $\chi(id) = 6$, $\chi(t) = 0$, $\chi(c) = 0$, więc $\chi_3(id) = 2$, $\chi_3(t) = 0$, $\chi_3(c) = -1$.

5 Rozkład reprezentacji

W całym bieżącym rozdziale g oznacza rząd grupy G.

5.1 Kanoniczny rozkład reprezentacji

Definicja 5.1. *Niech $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową, $\chi_1, ..., \chi_h$ będą charakterami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych $W_1, ..., W_h$ grupy G, stopni $n_1, ..., n_h$, a $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ będzie rozkładem na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.*
Dla $i = 1, ..., h$ oznaczmy przez V_i sumę prostą tych spośród reprezentacji U_j, które są izomorficzne z W_i. Wtedy

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h \quad \overset{def}{-} \ \textbf{\textit{rozkład kanoniczny.}}$$

Twierdzenie 5.1.

1. *Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu na reprezentacje nieprzywiedlne.*

2. *Rzutowanie p_i przestrzeni V na V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem*

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t^{-1}) \varrho_t$$

Dowód.

1. wynika z (2), bo $V_i = \mathrm{Im}(p_i)$.

2. Niech

$$f_i = \frac{n_i}{g} {\chi_i}^* \quad \text{oraz} \quad \varrho_{f_i} = \sum_{t \in G} f_i(t) \varrho_t$$

Dla podreprezentacji nieprzywiedlnej W o charakterze χ, stopnia n, mamy

$$\varrho_{f_i}|_W = \sum_{t \in G} f_i(t) \varrho_t^W$$

i z twierdzenia 4.1 $\varrho_{f_i}|_W$ jest jednokładnością o współczynniku

$$\lambda = \frac{g}{n} < f_i, \chi^* >= \frac{g}{n} < \frac{n_i}{g} {\chi_i}^*, \chi^* >= \frac{n_i}{n} < \chi_i, \chi >$$

Mamy

$$\varrho_{f_i}|_W = \lambda = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } W \text{ jest izomorficzna z } W_i, \\ 0 & \text{jeśli } W \text{ nie jest izomorficzna z } W_i. \end{cases}$$

Stąd $\varrho_{f_i}|_{V_i} = 1$ i $\varrho_{f_i}|_{V_j} = 0$ dla $j \neq i$.
Zatem dla $x \in V$, jeśli rozłożymy x na składowe $x = x_1 + \ldots + x_h$, gdzie $x_1 \in V_1, \ldots, x_h \in V_h$, dostajemy

$$\varrho_{f_i}(x) = \varrho_{f_i}(x_1) + \ldots + \varrho_{f_i}(x_h) = x_i.$$

To oznacza, że ϱ_{f_i} jest rzutem V na V_i:

$$p_i = \varrho_{f_i} = \sum_{t \in G} \frac{n_i}{g} {\chi_i}^*(t) \varrho_t.$$

□

Rozkład reprezentacji V możemy przeprowadzić w dwóch etapach:

1) $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h$ - za pomocą wzorów na p_i,

2) $V_i = W_i \oplus \ldots \oplus W_i$ - o tym będzie za chwilę.

Przykład 5.1. *Niech $G = \{1, s\}$ będzie grupą dwuelementową, $s^2 = 1$.*
G ma dwie reprezentacje nieprzywiedlne stopnia 1, W^+ i W^-, odpowiadające $\varrho_s = 1$ i $\varrho_s = -1$.
Rozkład kanoniczny V ma postać:

$$V = V^+ \oplus V^-,$$

gdzie

$V^+ = \{x \in V : \ \varrho_s(x) = x\}$ *- zbiór elementów $x \in V$ symetrycznych*
$V^- = \{x \in V : \ \varrho_s(x) = -x\}$ *- zbiór elementów $x \in V$ antysymetrycznych*

Odpowiadające rzuty to:

$$p^+(x) = \frac{1}{2} \left(\chi_+(1^{-1})x + \chi_+(s^{-1}) \varrho_s(x) \right) = \frac{1}{2} \left(x + \varrho_s(x) \right)$$

$$p^-(x) = \frac{1}{2} \left(\chi_-(1^{-1})x + \chi_-(s^{-1}) \varrho_s(x) \right) = \frac{1}{2} \left(x - \varrho_s(x) \right)$$

Rozkład reprezentacji V^+ i V^- na reprezentacje nieprzywiedlne to rozkład na sumę prostą przestrzeni 1-wymiarowych.

5.2 Dalszy rozkład reprezentacji

Zajmiemy się teraz rozkładem podreprezentacji V_i na sumę prostą $W_i \oplus \ldots \oplus W_i$, dla ustalonego $i \in \{1, ..., h\}$.
Zadajmy reprezentację W_i (stopnia $n_i =: n$) w postaci macierzowej $(r_{\alpha\beta}(s))_{\alpha,\beta}$ względem bazy $(e_1, ..., e_n)$ przestrzeni W_i. Dla każdych $\alpha, \beta \in \{1, ..., n\}$ zdefiniujmy przekształcenie liniowe $p_{\alpha\beta} : V \to V$:

$$p_{\alpha\beta} = \frac{n}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \varrho_t \tag{1}$$

Twierdzenie 5.2.

(a) $p_{\alpha\alpha}$ *jest rzutem i jest zerem na* V_j *dla* $j \neq i$. *Obraz Im*$(p_{\alpha\alpha}) =: V_{i,\alpha}$ *jest zawarty w* V_i *oraz* $V_i = \bigoplus_{\alpha=1}^{n} V_{i,\alpha}$. *Ponadto* $p_i = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\alpha\alpha}$.

(b) $p_{\alpha\beta}$ *jest zerem na* V_j *dla* $j \neq i$ *oraz na* $V_{i,\gamma}$ *dla* $\gamma \neq \beta$; $p_{\alpha\beta}$ *wyznacza izomorfizm* $V_{i,\beta}$ *na* $V_{i,\alpha}$.

(c) Niech $x_1 \in V_{i,1} \setminus \{0\}$ *i niech* $x_\alpha = p_{\alpha 1}(x_1) \in V_{i,\alpha}$.
Elementy $(x_\alpha)_{\alpha=1}^{n}$ *są liniowo niezależne i generują* n*-wymiarową podprzestrzeń* $W(x_1)$ *niezmienniczą względem* G.
Dla $s \in G$ *mamy* $\varrho_s(x_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{n} r_{\beta\alpha}(s) x_\beta$.
(W szczególności podreprezentacja $W(x_1)$ *jest izomorficzna z reprezentacją* W_i.*)*

(d) Jeśli $(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(m)})$ *jest bazą* $V_{i,1}$, *to reprezentacja* V_i *jest sumą prostą reprezentacji* $W(x_1^{(1)}), ..., W(x_1^{(m)})$ *określonych w (c).*

(W ten sposób wybór bazy przestrzeni $V_{i,1}$ prowadzi do rozkładu V_i na sumę prostą reprezentacji izomorficznych z W_i.)

Dowód.

Krok 1. Zauważmy najpierw, że wzór (1) umożliwia określenie $p_{\alpha\beta}$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. Dla reprezentacji nieprzywiedlnej W_i mamy (Δ oznacza deltę Kroneckera):

$$\begin{aligned}
p_{\alpha\beta}(e_\gamma) &= \frac{n}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \underbrace{\varrho_t(e_\gamma)}_{\sum_\delta r_{\delta\gamma}(t) e_\delta} = \\
&= n \sum_\delta \left(\frac{1}{g} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) r_{\delta\gamma}(t) \right) e_\delta \overset{\text{z wniosku 3.3 z lematu Schura}}{=} \\
&= n \sum_\delta \left(\frac{1}{n} \Delta_{\beta\gamma} \Delta_{\alpha\delta} \right) e_\delta = \\
&= \Delta_{\beta\gamma} \sum_\delta \Delta_{\alpha\delta} e_\delta = \\
&= \Delta_{\beta\gamma} e_\alpha \\
p_{\alpha\beta}(e_\beta) &= e_\alpha \\
p_{\alpha\beta}(e_\gamma) &= 0 \quad \text{dla} \quad \gamma \neq \beta
\end{aligned}$$

Dalej

$$\varrho_s \circ p_{\alpha\gamma} = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta\gamma} \tag{2}$$

bo

$$\varrho_s(p_{\alpha\gamma}(e_\gamma)) = \varrho_s(e_\alpha) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)e_\beta = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta\gamma}(e_\gamma)$$

oraz obie strony dają 0 dla argumentu $e_\delta,\ \delta \neq \gamma$.

Teraz dla reprezentacji nieprzywiedlnej W nieizomorficznej z W_i jeśli $(\tilde{e}_k)_k$ jest bazą W, a $(\tilde{r}_{kl}(t))$ macierzą ϱ_t w tej bazie, wówczas mamy:

$$p_{\alpha\beta}(\tilde{e}_\gamma) = n \sum_\delta \underbrace{\left(\frac{1}{g} \sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1})\tilde{r}_{\delta\gamma}(t) \right)}_{=0 \text{ z wniosku 3.2 z lematu Schura}} \tilde{e}_\delta = 0$$

Zatem $p_{\alpha\beta}$ są zerami na W.

Krok 2. V rozkłada się na sumę prostą podreprezentacji izomorficznych z $W_j,\ j = 1, ..., h$. Stosując do nich wyniki z Kroku 1. dostajemy przekształcenia $p_{\alpha\beta}$ zdefiniowane na całej reprezentacji V.

(a) Dla $j \neq i$ mamy $V_j = W_j^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_j^{(l)}$, gdzie $W_j^{(k)}$ są izomorficzne z W_j.
$p_{\alpha\alpha}[W_j^{(k)}] = \{0\}$ (bo $W_j^{(k)}$ nie jest izomorficzna z W_i), więc $p_{\alpha\alpha}[V_j] = \{0\}$.
Dalej, V_i rozkłada się na $V_i = W_i^{(1)} \oplus \ldots \oplus W_i^{(m)}$, gdzie $W_i^{(k)}$ są izomorficzne z W_i.
Dla $k = 1, ..., m$, istnieje baza $(e_1^{(k)}, ..., e_n^{(k)})$ przestrzeni $W_i^{(k)}$, taka że dla każdego $s \in G$ macierzą ϱ_s w tej bazie jest $(r_{\alpha\beta}(s))$.
Wtedy $V_i = \text{lin}\left\{ e_\alpha^{(k)} :\ \alpha \in \{1, ..., n\},\ k \in \{1, ..., m\} \right\}$.
Dalej

$$p_{\alpha\alpha}(e_\alpha^{(k)}) = e_\alpha^{(k)} \quad \text{oraz} \quad p_{\alpha\alpha}(e_\beta^{(k)}) = 0 \quad \text{dla} \quad \beta \neq \alpha.$$

Zatem $p_{\alpha\alpha}$ jest rzutem na $V_{i,\alpha} = \text{lin}\left\{ e_\alpha^{(1)}, ..., e_\alpha^{(m)} \right\}$, a stąd $V_{i,\alpha} \subseteq V_i$, $\quad V_i = \bigoplus_{\alpha=1}^n V_{i,\alpha}$ oraz $p_i = \sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$.

(b) wynika z obliczeń w Kroku 1. oraz z równości $V_{i,\alpha} = \text{lin}\left\{ e_\alpha^{(1)}, ..., e_\alpha^{(m)} \right\}$ dla $\alpha = 1, ..., n$.

(c) Liniowa niezależność $(x_\alpha)_{\alpha=1}^n$ wynika z podpunktu (b) oraz z faktu, że $V_{i,\alpha} \cap V_{i,\beta} = \{0\}$ dla $\alpha \neq \beta$.
Wzór (2) działa na przestrzeni V_i, więc dla x_α z podpunktu (c) i $s \in G$ mamy

$$\varrho_s(x_\alpha) = \varrho_s \circ p_{\alpha,1}(x_1) \overset{\text{ze wzoru 2}}{=} \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)p_{\beta 1}(x_1) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)x_\beta.$$

(d) Załóżmy, że $(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(m)})$ jest bazą $V_{i,1}$.
Dla $\alpha = 1, ..., n$, $p_{\alpha,1}$ jest izomorfizmem z $V_{i,1}$ na $V_{i,\alpha}$, zatem

$$(p_{\alpha,1}(x_1^{(1)}), ..., p_{\alpha,1}(x_1^{(m)})) = (x_\alpha^{(1)}, ..., x_\alpha^{(m)}) \text{ jest bazą } V_{i,\alpha}.$$

Stąd $V_{i,\alpha} = \bigoplus_{k=1}^m \text{lin}\{x_\alpha^{(k)}\}$ oraz

$$V_i = \bigoplus_{\alpha=1}^n V_{i,\alpha} = \bigoplus_{\alpha=1}^n \bigoplus_{k=1}^m \text{lin}\{x_\alpha^{(k)}\} = \bigoplus_{k=1}^m \bigoplus_{\alpha=1}^n \text{lin}\{x_\alpha^{(k)}\} = \bigoplus_{k=1}^m W(x_1^{(k)}).$$

□

6 Podgrupy przemienne, iloczyny

6.1 Podgrupy przemienne

Niech G będzie grupą. Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

(i) G jest przemienna

(ii) każda klasa sprzężoności grupy G jest jednoelementowa

(iii) każda funkcja określona na G jest centralna

Twierdzenie 6.1. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) G jest przemienna,

(ii) Wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy G w przestrzeni liniowej nad ciałem algebraicznie domkniętym są stopnia 1.

Dowód. Niech g - rząd grupy G oraz $n_1, ..., n_h$ - stopnie wszystkich różnych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Wiadomo, że h jest liczbą klas sprzężoności grupy G oraz $g = {n_1}^2 + \ldots + {n_h}^2$. Zatem $h = g$ dokładnie wtedy, gdy wszystkie n_i są równe 1. $\square$

Wniosek 6.1. *Niech A będzie przemienną podgrupą grupy G. Wtedy każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest stopnia $\leqslant [G : A]$.*

Dowód. Weźmy dowolną reprezentację nieprzywiedlną $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Wtedy $\varrho|_A$ jest reprezentacją grupy A. Niech W będzie nieprzywiedlną podreprezentacją reprezentacji $\varrho|_A$. Z twierdzenia 6.1 dostajemy $\dim(W) = 1$. Niech $V' = \sum_{s\in G} \varrho_s W$. Wtedy podprzestrzeń V' jest niezmiennicza względem G. Ponadto ϱ jest nieprzywiedlna, zatem $V' = V$.
Dalej, dla $s \in G,\ \ t \in A$ mamy

$$\varrho_{st}W = \varrho_s[\varrho_t W] = \varrho_s W.$$

Zatem liczba różnych przestrzeni $\varrho_s W$ jest nie większa niż $[G : A]$ i $\dim(\varrho_s W = 1)$, więc $\dim(V) \leqslant [G : A]$. $\square$

Przykład 6.1. *Grupa dyhedralna zawiera podgrupę cykliczną indeksu 2. Zatem jej reprezentacje nieprzywiedlne są stopnia 1 lub 2.*

6.2 Iloczyn tensorowy dwóch reprezentacji określony na iloczynie dwóch grup

Dla danych grup $G_1,\ G_2$, zbiór $G_1 \times G_2$ z działaniem $(a, b)(c, d) := (ac, bd)$ tworzy iloczyn grup G_1 i G_2.
G_1 możemy utożsamić z $\{(s, 1) : s \in G_1\} \leqslant G_1 \times G_2$ i podobnie G_2 z $\{(1, s) : s \in G_2\}$.
Wówczas każdy element G_1 jest przemienny z każdym elementem G_2.
Odwrotnie, jeśli G jest grupą oraz $G_1,\ G_2$ jej podgrupami, takimi że

(i) każdy $s \in G$ zapisuje się jednoznacznie jako $s = s_1 s_2,\ \ s_1 \in G_1,\ s_2 \in G_2$,

(ii) dla dowolnych $s_1 \in G_1,\ s_2 \in G_2$ zachodzi $s_1 s_2 = s_2 s_1$.

to iloczyn dwóch elementów $s = s_1 s_2$ i $t = t_1 t_2$ można zapisać w postaci

$$st = s_1 s_2 t_1 t_2 = (s_1 t_1)(s_2 t_2).$$

Zatem $G_1 \times G_2 \ni (s_1, s_2) \mapsto s_1 s_2 \in G$ jest izomorfizmem grup. W tym wypadku mówimy, że G jest iloczynem (prostym) swych podgrup G_1 i G_2 i utożsamiamy ją z $G_1 \times G_2$.

Definicja 6.1. *Niech* $\varrho^i : G_i \to \mathit{GL}(V_i), \quad i = 1, 2,$ *będą reprezentacjami.*
Definiujemy reprezentację liniową $\varrho^1 \otimes \varrho^2$ *grupy* $G_1 \times G_2$ *w przestrzeni* $V_1 \otimes V_2$ *:*

$$(\varrho^1 \otimes \varrho^2)_{(s_1,s_2)} = \varrho^1_{s_1} \otimes \varrho^2_{s_2}$$

(gdzie $(\varrho^1_{s_1} \otimes \varrho^2_{s_2})(x \cdot y) = \varrho^1_{s_1}(x) \cdot \varrho^2_{s_2}(y)$*).*
Tę reprezentację nazywamy ***iloczynem tensorowym reprezentacji*** ϱ^1 *i* ϱ^2*.*

Mamy $\chi_{\varrho^1 \otimes \varrho^2}(s_1, s_2) = \chi_{\varrho^1}(s_1)\chi_{\varrho^2}(s_2)$.

Uwaga 6.1. *Uwaga na oznaczenia:*
Jeśli $G_1 = G_2 = G$*, to określona wyżej reprezentacja* $\varrho^1 \otimes \varrho^2$ *jest reprezentacją grupy* $G \times G$*.*
Gdy ograniczymy się do podgrupy diagonalnej $\{(s, s) : \ s \in G\} \leqslant G \times G$*, dostaniemy reprezentację grupy* G *oznaczoną wcześniej również przez* $\varrho^1 \otimes \varrho^2$*.*

Twierdzenie 6.2.

1. *Jeśli reprezentacje* ϱ^1 *i* ϱ^2 *są nieprzywiedlne, to* $\varrho^1 \otimes \varrho^2$ *jest nieprzywiedlna.*

2. *Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy* $G_1 \times G_2$ *jest izomorficzna z reprezentacją postaci* $\varrho^1 \otimes \varrho^2$*, gdzie* ϱ^1, ϱ^2 *- nieprzywiedlne reprezentacje odpowiednio grup* G_1, G_2*.*

Dowód.

1. Skorzystamy z twierdzenia 3.4.
   ϱ^1, ϱ^2 są nieprzywiedlne, zatem

$$1 = (\chi_{\varrho^i}|\chi_{\varrho^i}) = \frac{1}{|G_i|} \sum_{s_i} |\chi_{\varrho^i}(s_i)|^2, \quad i = 1, 2.$$

   Mnożąc równości dla $i = 1, 2$ stronami, dostajemy

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{s_1,s_2} |\chi_{\varrho^1}(s_1)\chi_{\varrho^2}(s_2)|^2 = \\ &= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(s_1,s_2)} |\chi_{\varrho^1 \otimes \varrho^2}(s_1, s_2)|^2 = \\ &= (\chi_{\varrho^1 \otimes \varrho^2}|\chi_{\varrho^1 \otimes \varrho^2}), \end{aligned}$$

   więc $\varrho^1 \otimes \varrho^2$ jest nieprzywiedlna.

2. Wystarczy pokazać, że każda funkcja centralna f określona na $G_1 \times G_2$ ortogonalna do wszystkich charakterów postaci $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$ (gdzie χ_i jest charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej grupy G_i dla $i = 1, 2$) jest zerem
   (bo wtedy układ ortonormalny charakterów $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$ jest bazą przestrzeni liniowej funkcji centralnych z $G_1 \times G_2$ w $\mathbb{C}$, a jak wiemy, wszystkie charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych grupy $G_1 \times G_2$ tworzą bazę tej przestrzeni).

   Załóżmy, że f jest centralna i dla każdych χ_1, χ_2,

$$L := \sum_{s_1,s_2} f(s_1, s_2)\overline{\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)} = 0.$$

   Dla charakteru χ_2 rozważmy

$$g_{\chi_2}(s_1) := \sum_{s_2} f(s_1, s_2)\overline{\chi_2(s_2)}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} g_{\chi_2}(ts_1t^{-1}) &= \sum_{s_2} f(ts_1t^{-1}, s_2)\overline{\chi_2(s_2)} = \\ &= \sum_{s_2} f((t,1)(s_1,s_2)(t,1)^{-1})\overline{\chi_2(s_2)} = \\ &= \sum_{s_2} f(s_1,s_2)\overline{\chi_2(s_2)} = \\ &= g_{\chi_2}(s_1), \end{aligned}$$

więc g_{χ_2} jest centralną funkcją na G_1.
Ponadto $0 = L = \sum_{s_1} g_{\chi_2}(s_1)\overline{\chi_1(s_1)}$ dla każdego χ_1. Zatem $g_{\chi_2} = 0$.
Stąd dla każdego χ_2 oraz $s_1 \in G_1$:

$$0 = g_{\chi_2}(s_1) = \sum_{s_2} f(s_1,s_2)\overline{\chi_2(s_2)} \overset{f_a(b):=f(a,b)}{=} \sum_{s_2} f_{s_1}(s_2)\overline{\chi_2(s_2)}.$$

f_{s_1} jest centralną funkcją na G_2, więc $f_{s_1} = 0$.
Zatem dla dowolnych $s_1 \in G_1$ i $s_2 \in G_2$,

$$f(s_1,s_2) = f_{s_1}(s_2) = 0.$$

□

7 Reprezentacje indukowane

Niech $\varrho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją liniową, zaś H podgrupą G. Wtedy $\varrho|_H$ jest reprezentacją grupy H w przestrzeni V. Rozważmy jej podreprezentację $\theta := \varrho|_H{}^W$ w podprzestrzeni $W \leqslant V$.
Dla $s \in G$, przestrzeń $\varrho_s W$ zależy jedynie od warstwy lewostronnej sH (ponieważ dla $h \in H$ mamy $\varrho_{sh}W = \varrho_s[\varrho_h W] = \varrho_s[\theta_h W] = \varrho_s W$). Stąd dla $\sigma \in G/H$ możemy określić W_σ jako $\varrho_s W$ dla dowolnego $s \in \sigma$.
Dla dowolnych $s \in G$ i $\sigma \in G/H$ mamy $\varrho_s W_\sigma = W_\tau$ dla pewnego $\tau \in G/H$. Zatem

$$\widetilde{V} = \sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma \tag{3}$$

jest przestrzenią niezmienniczą względem G. Stąd $\widetilde{V}$ jest podreprezentacją reprezentacji V.
Jeśli $V = \widetilde{V}$ oraz suma we wzorze 3 jest prosta, wówczas mamy do czynienia z reprezentacją indukowaną:

Definicja 7.1. *Niech $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową i $H \leqslant G$. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V niezmienniczą na działanie grupy H (tzn. $\varrho_h W \subseteq W$ dla $h \in H$) i niech $\theta := \varrho|_H{}^W$. Mówimy, że ϱ jest* ***reprezentacją indukowaną*** *przez θ, jeśli*

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

(gdzie W_σ jest określone jak wcześniej).

Jeśli R jest zbiorem reprezentantów zbioru G/H, to możemy równoważnie powiedzieć, że:

$$\varrho \text{ jest indukowana przez } \theta \iff V = \bigoplus_{r \in R} \varrho_r W.$$

Ponadto mamy $\mathsf{dim}(V) = \sum_{r \in R} \mathsf{dim}(\varrho_r W) = [G : H] \cdot \mathsf{dim}(W)$.

Przykład 7.1. *V - reprezentacja regularna grupy G, $(e_t)_{t\in G}$ - baza V.*
Wtedy $W = \mathit{lin}\{e_h :\ h \in H\}$ jest niezmiennicza względem H.
Ponadto reprezentacja θ jest reprezentacją regularną grupy H i ρ jest indukowana przez θ.

Przykład 7.2. *V - przestrzeń liniowa o bazie $(e_\sigma)_{\sigma\in G/H}$, $\varrho : G \to GL(V)$ - reprezentacja zadana przez $\varrho_s(e_\sigma) = e_{s\sigma}$.*
ϱ jest reprezentacją permutacyjną grupy G stowarzyszoną ze zbiorem G/H. Wektor e_H jest niezmienniczy względem H, zatem dla $W = \mathit{lin}\{e_H\}$ θ jest reprezentacją trywialną i θ indukuje ϱ.

Przykład 7.3. *Jeśli reprezentacja ϱ^i jest indukowana przez θ^i, $\quad i = 1, 2$, to reprezentacja $\varrho^1 \oplus \varrho^2$ jest indukowana przez $\theta^1 \oplus \theta^2$.*

Przykład 7.4. *Jeśli $\varrho : G \to GL(V)$ jest indukowana przez $\theta : H \to GL(W)$ oraz $\widetilde{W} \leqslant W$ jest niezmiennicza względem H, to $\widetilde{V} := \bigoplus_{r\in R} \varrho_r \widetilde{W}$ jest niezmiennicza względem G oraz $\varrho^{\widetilde{V}}$ jest indukowana przez $\theta^{\widetilde{W}}$.*

Przykład 7.5. *Jeśli ϱ jest indukowana przez θ i jeśli $\varrho' : G \to GL(V')$ jest reprezentacją, to $\varrho \otimes \varrho'$ jest indukowana przez $\theta \otimes (\varrho'|_H)$.*

7.1 Istnienie i jednoznaczność reprezentacji indukowanej

Lemat 7.1. *Niech $\varrho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją liniową indukowaną przez $\theta : H \to GL(W)$, zaś $\varrho' : G \to GL(V')$ kolejną reprezentacją. Niech $f : W \to V'$ będzie przekształceniem liniowym, takim że $f \circ \theta_h = \varrho'_h \circ f$ dla wszystkich $h \in H$.*
Wtedy istnieje jedyne przekształcenie liniowe $F : V \to V'$ będące przedłużeniem f i spełniające $F \circ \varrho_s = \varrho'_s \circ F$ dla wszystkich $s \in G$.

Dowód.
Jednoznaczność: Weźmy dowolne przekształcenie F spełniające podane warunki.
Dla $s \in G$ i $x \in \varrho_s W$ mamy ${\varrho_s}^{-1}x \in W$ oraz

$$F(x) = F(\varrho_s {\varrho_s}^{-1} x) = \varrho'_s F({\varrho_s}^{-1}x) = \varrho'_s f({\varrho_s}^{-1}x).$$

Powyższy wzór wyznacza wartości F na przestrzeniach $\varrho_s W$, a więc i na całej przestrzeni V.
Istnienie: Weźmy dowolne $\sigma \in G/H$, oraz $x \in W_\sigma$ i $s \in \sigma$. Zdefiniujmy $F(x)$ wzorem otrzymanym powyżej, tzn.

$$F(x) = \varrho'_s f({\varrho_s}^{-1}x). \tag{4}$$

Ta definicja nie zależy od wyboru $s \in \sigma$, bo dla $s \in \sigma$ i $h \in H$ mamy

$$\varrho'_{sh} F({\varrho_{sh}}^{-1}x) = \varrho'_s \varrho'_h f({\theta_h}^{-1}{\varrho_s}^{-1}x) = \varrho'_s f(\theta_h {\theta_h}^{-1} {\varrho_s}^{-1}x) = \varrho'_s f({\varrho_s}^{-1}x).$$

Powyższa definicja określa nam jednoznacznie F na przestrzeni V, jako że $V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$.
Przyjmując za s element neutralny (dla $\sigma = H$) we wzorze 4, dostajemy że F jest przedłużeniem f.
Warunek $F \circ \varrho_s = \varrho'_s \circ F$ dla $s \in G$ dostajemy, sprawdzając go na każdej przestrzeni $\varrho_t W$, $t \in G$ $(x \in \varrho_t W)$:

$$F(\varrho_s x) = \varrho'_{st} F({\varrho_{st}}^{-1} \varrho_s x) = \varrho'_s \varrho'_t f(\varrho_t^{-1} \varrho_s^{-1} \varrho_s x) = \varrho'_s F(x).$$

□

Twierdzenie 7.1. *Niech H będzie podgrupą G, a $\theta : H \to GL(W)$ reprezentacją liniową.*
Wówczas istnieją nadprzestrzeń $V \geqslant W$ oraz reprezentacja $\varrho : G \to GL(V)$ indukowana przez θ.
Reprezentacja ta jest jedyna z dokładnością do izomorfizmu.

Dowód.

Istnienie: Na podstawie przykładu 7.3 możemy się ograniczyć do przypadku, gdy θ jest nieprzywiedlna. Wtedy θ możemy utożsamić z podreprezentacją reprezentacji regularnej η grupy H. Z przykładu 7.1 istnieje reprezentacja indukowana przez η - reprezentacja regularna γ grupy G. Z przykładu 7.4 dostajemy, że istnieje reprezentacja ϱ indukowana przez θ.

Jednoznaczność: Niech $\varrho^i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą reprezentacjami indukowanymi przez θ. Stosując lemat 7.1 dla $f = \mathrm{id}_{V'}|_W$, dostajemy przedłużenie $F : V \to V'$ spełniające $(\forall s \in G) F \circ \varrho_s = \varrho'_s \circ F$. Mamy $F[\varrho_s W] = \varrho'_s F[W] = \varrho'_s W$, zatem obraz przekształcenia F zawiera wszystkie podprzestrzenie $\varrho'_s W$. Stąd $\mathrm{Im} F = V'$. Ponadto przestrzenie V i V' mają ten sam wymiar $[G : H]\mathrm{dim}(W)$, więc F jest izomorfizmem, a stąd ϱ^1 i ϱ^2 są izomorficzne. □

7.2 Charakter reprezentacji indukowanej

Twierdzenie 7.2. *Niech H będzie podgrupą grupy G, R zbiorem reprezentantów zbioru G/H, zaś $\varrho : G \to GL(V)$ reprezentacją indukowaną przez $\theta : H \to GL(W)$.*
Wtedy dla każdego $u \in G$ mamy

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}us \in H}} \chi_\theta(s^{-1}us). \tag{5}$$

Dowód. Ustalmy dowolne $u \in G$.

V jest sumą prostą przestrzeni $\varrho_r W$, $r \in R$. Przekształcenie ϱ_u permutuje przestrzenie $\varrho_r W$ pomiędzy sobą. Niech r_u oznacza jedyny element zbioru R, taki że $(\exists h \in H) ur = r_u h$.
Wtedy ϱ_u przekształca $\varrho_r W$ na $\varrho_{r_u} W$. Funkcja $r \mapsto r_u$ jest permutacją zbioru R. Oznaczmy

$$R_u = \{r \in R : \ r = r_u\}.$$

Niech $(b_{r,i})_{i=1,\dots,m}$ będzie bazą przestrzeni $\varrho_r W$, gdzie $m = \mathrm{dim}(W)$.
Wtedy $B := (b_{r,i})_{r \in R;\, i=1,\dots,m}$ jest bazą V.
Niech liczby $\alpha_{r,i;\, s,j}$ będą wyrazami macierzy przekształcenia ϱ_u w bazie B, tak że

$$\varrho_u(b_{s,j}) = \sum_{r,i} \alpha_{r,i;\, s,j} b_{r,i}.$$

Wówczas dla $r \notin R_u$ mamy $\alpha_{r,i;\, r,i} = 0$, $i = 1, ..., m$.
Z kolei dla $r \in R_u$ mamy

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{r,i;\, r,i} = \mathrm{Tr}(\varrho_{u,r})$$

gdzie $\varrho_{u,r}$ oznacza przekształcenie $\varrho_u|_{\varrho_r W}$ traktowane jako funkcja z $\varrho_r W$ na $\varrho_r W$. Otrzymujemy

$$\mathrm{Tr}(\varrho_u) = \sum_{r \in R_u} \mathrm{Tr}(\varrho_{u,r}). \tag{6}$$

Zauważmy, że dla $r \in R$,

$$r \in R_u \iff (\exists h \in H) ur = rh \iff r^{-1}ur \in H.$$

Dla $r \in R_u$, traktując ϱ_r jako izomorfizm z W na $\varrho_r W$, dostajemy

$$\varrho_r \circ \theta_{r^{-1}ur} = \varrho_r \circ \varrho_{r^{-1}} \circ \varrho_{u,r} \circ \varrho_r = \varrho_{u,r} \circ \varrho_r. \tag{7}$$

Niech $(\alpha_{i,j})_{i,j}$ będzie macierzą $\theta_{r^{-1}ur}$ w bazie $(b_i)_{i=1,\ldots,m}$ przestrzeni W. Mamy wówczas

$$\varrho_{u,r}(\varrho_r(b_j)) \overset{\text{ze wzoru 7}}{=} \varrho_r(\theta_{r^{-1}ur}(b_j)) = \varrho_r(\sum_i \alpha_{i,j} b_i) = \sum_i \alpha_{i,j} \varrho_r(b_i).$$

Zatem używając bazy $(\varrho_r(b_i))_i$ do obliczenia śladu $\varrho_{u,r}$, dostajemy

$$\mathsf{Tr}(\rho_{u,r}) = \sum_i \alpha_{i,i} = \mathsf{Tr}(\theta_{r^{-1}ur}) = \chi_\theta(r^{-1}ur).$$

Stąd

$$\chi_\varrho(u) \overset{\text{ze wzoru 6}}{=} \sum_{r \in R_u} \chi_\theta(r^{-1}ur),$$

a to daje nam pierwszą równość we wzorze 5.
Drugą równość we wzorze 5 dostaniemy, jeśli zauważymy, że dla dowolnych $r, s \in G$:

1) jeśli $s \in rH$, to $\quad (r^{-1}ur \in H \Leftrightarrow s^{-1}us \in H)$,

2) jeśli $s \in rH$ oraz $r^{-1}ur \in H$, to $\quad \chi_\theta(r^{-1}ur) = \chi_\theta(s^{-1}us)$.

□

8 Algebry grupowe

Wszystkie rozważane w poniższym rozdziale grupy są skończone.

Definicja 8.1. *Niech G będzie grupą, a $\mathbf{K}$ ciałem. Wtedy **algebrą grupową** $\mathbf{K}[G]$ nazywamy przestrzeń liniową z bazą indeksowaną elementami grupy G utożsamioną z grupą G. W $\mathbf{K}[G]$ zdefiniowane jest działanie mnożenia dane wzorem:*

$$fg = \sum_{s \in G} f_s s \sum_{s \in G} g_s s = \sum_{s,t \in G} f_s g_t st,$$

dla $f, g \in \mathbf{K}[G]$.

Fakt 8.1. *Tak zdefiniowane mnożenie w $\mathbf{K}[G]$ jest łączne.*

Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbf{K}$ i niech $\varrho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją liniową G. Wtedy możemy dla elementów $s \in G$ i $x \in V$ zdefiniować mnożenie wzorem $sx = \varrho_s x$. Rozszerzając je liniowo otrzymujemy mnożenie fx dla $f \in \mathbf{K}[G], x \in V$. W ten sposób otrzymujemy na V strukturę $\mathbf{K}[G]$-modułu. Podobnie struktura $\mathbf{K}[G]$-modułu wyznacza jednoznacznie reprezentację liniową. W dalszej części będziemy używać zamiennie terminów reprezentacja liniowa i moduł.

8.1 Centrum algebry $\mathbb{C}[G]$

Dla klasy sprzężoności c w grupie G przyjmijmy $e_c = \sum_{s \in c} s$.

Fakt 8.2. *Elementy e_c tworzą bazę Cent$(\mathbb{C}[G])$ jako przestrzeni liniowej.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje element $x \in \mathsf{Cent}(\mathbb{C}[G])$ nie będący kombinacją liniową e_c. Wiemy, że $x = \sum_{s \in G} x(s)s$. W takim razie istnieje klasa sprzężoności d oraz jej elementy $u, v \in d$ takie, że $x(u) \neq x(v)$. Mamy $u = tvt^{-1}$, więc

$$t^{-1}xt = t^{-1}(\sum_{s \in G} x(s)s)t = t^{-1}t(\sum_{s \in G} x(s)s) = z,$$

gdyż $x \in \mathsf{Cent}(\mathbb{C}[G])$. Z drugiej strony współczynnik stojący przy v zmienił się z $x(v)$ na $x(u)$ (ponieważ $t^{-1}ut = t^{-1}tvt^{-1}t = v$). Co daje sprzeczność. □

Wniosek 8.1. *Jeśli h jest liczbą klas sprzężoności grupy G, to jest to również wymiar centrum algebry $\mathbb{C}[G]$.*

8.2 Całkowitość charakterów

Lemat 8.1. *Niech x będzie elementem pierścienia przemiennego z jednością R, a Z podpierścieniem noetherowskim R. Wtedy następujące własności są równoważne:*

1. *Element x jest całkowity nad Z.*
2. *Podpierścień $Z[x]$ pierścienia R generowany przez x jest skończenie generowanym Z-modułem.*
3. *Istnieje skończenie generowany Z-moduł zawarty w R, który zawiera $Z[x]$.*

Dowód. Równoważność własności (2) i (3) wynika z faktu, że podmoduł skończenie generowanego Z-modułu jest skończenie generowanym Z-modułem, gdyż Z jest pierścieniem noetherowskim.

Gdy element x spełnia równość

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

dla $a_1, ..., a_n \in Z$, to ciąg 1, x, ..., x^{n-1} generuje $Z[x]$, co dowodzi implikacji (1) ⇒ (2).

Załóżmy, że spełniony jest warunek (2).
Wtedy jako M_n nazwijmy Z-moduł generowany przez 1, x, x^2, ..., x^{n-1}. Moduły M_N są wstępującym ciągiem ideałów pierścienia $Z[x]$. Jako, że Z jest pierścieniem noetherowskim, to $Z[x]$ także, więc ciąg M_n się stabilizuje. Niech M_N będzie miejscem stabilizacji. Jest to skończenie generowany Z-moduł i x^N da się zapisać jako kombinację 1, x, ..., x^{N-1}. Co dowodzi implikacji (2) ⇒ (1). □

Wniosek 8.2. *Jeśli pierścień R jest skończenie generowanym Z-modułem, to każdy element R jest całkowity nad Z.*

Dowód. Dla dowolnego $x \in R$ istnieje skończenie generowany Z-moduł zawierający $Z[x]$ (jest nim R), więc z implikacji (3) ⇒ (1) x jest całkowity nad Z. □

Wniosek 8.3. *Elementy pierścienia R całkowite nad Z tworzą podpierścień.*

Dowód. Ustalmy całkowite elementy $x, y \in R$. Z Lematu 8.1 wiemy, że podpierścień $Z[x]$ jest skończenie generowany. W takim razie również podpierścień $Z[x][y] = Z[x, y]$ jest skończenie generowany, czyli elementy $x + y, xy$ są całkowite w pierścieniu R. □

W tym miejscu wracamy z abstrakcyjnych pierścieni R i Z do ciała $\mathbb{C}$ oraz pierścienia $\mathbb{Z}$. Do końca rozdziału g będzie też oznaczać rząd grupy G.

Twierdzenie 8.1. *Niech χ będzie charakterem reprezentacji ϱ grupy G. Wówczas dla każdego $s \in G$ wartość $\chi(s)$ jest całkowitą liczbą algebraiczną.*

Dowód. Dla ustalonego $s \in G$ wartość $\chi(s)$ jest sumą wartości własnych $\varrho(s)$. Skoro $\varrho_{s^g} = \varrho_1$, to dla ustalonej wartości własnej λ i jej wektora własnego x musi zachodzić $\lambda^g x = x$, czyli $\lambda^g = 1$. □

Twierdzenie 8.2. *Niech $u = \sum u(s)s$ będzie takim elementem Cent($\mathbb{C}[G]$), że $u(s)$ są całkowitymi liczbami algebraicznymi. Wówczas element u jest całkowity nad $\mathbb{Z}$.*

Dowód. Niech c_i dla $1 \leq i \leq h$ będą klasami sprzężoności grupy G. Ustalając dla każdej klasy dowolny element $s_i \in c_i$, zapiszmy u jako $\sum_{i=1}^{h} u(s_i)e_{c_i}$. Pokażmy, że elementy e_{c_i} są całkowite nad $\mathbb{Z}$. Z Wniosku 8.3 wystarczy to do pokazania tezy. Iloczyny $e_{c_i}e_{c_j}$ jako elementy *Cent*$(\mathbb{C}[G])$ można zapisać w bazie e_c, przy czym będą miały one całkowite współczynniki. W takim razie podprzestrzeń $\mathbb{Z}e_{c_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}e_{c_h}$ jest podpierścieniem *Cent*$(\mathbb{C}[G])$. Skoro jest to pierścień skończenie generowany, to z Wniosku 8.2 elementy tego pierścienia są całkowite nad $\mathbb{Z}$. □

Wniosek 8.4. *Niech ϱ będzie reprezentacją liniową grupy G o charakterze χ, a element $u = \sum_{s\in G} u(s)s$ będzie takim elementem Cent$(\mathbb{C}[G])$, że $u(s)$ są całkowitymi liczbami algebraicznymi.*
Wtedy $\frac{1}{n}\sum_{s\in G} u(s)\chi(s)$ jest całkowitą liczbą algebraiczną.

Dowód. Zdefiniujmy homomorfizm pierścieni ω : *Cent*$(\mathbb{C}[G]) \to \mathbb{C}$ następująco:

$$\omega(v) = \frac{1}{n}\sum_{s\in G} v(s)\chi(s).$$

Wtedy $\omega(u) = \frac{1}{n}\sum_{s\in G} u(s)\chi(s)$, więc jako obraz liczby całkowitej algebraicznej suma ta też jest liczbą całkowitą algebraiczną. □

Wniosek 8.5. *Stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G dzielą rząd tej grupy.*

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej grupy G stopnia n. Wtedy stosując Wniosek 8.4 dla elementu $u = \sum_{s\in G} \chi(s^{-1})s$ (χ jest funkcją centralną przyjmującą jako wartości całkowite liczby algebraiczne na mocy Twierdzenia 8.1), uzyskujemy, że:

$$\frac{1}{n}\sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\chi(s) = \frac{g}{n}\langle\chi,\chi\rangle = \frac{g}{n}$$

jest całkowitą liczbą algebraiczną. Skoro $\frac{g}{n}$ jest liczbą wymierną, to jest liczbą całkowitą na mocy Faktu 1.2. □

Powyższy wniosek można wzmocnić. Poniżej pierwszy krok w tym kierunku.

Twierdzenie 8.3. *Stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G dzielą indeks $[G : \mathit{Cent}(G)]$.*

Dowód. Ustalmy jako c rząd *Cent*(G) i niech $\varrho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n grupy G.

Jeśli $s \in \mathit{Cent}(G)$, to $\varrho(s)\varrho(t) = \varrho(t)\varrho(s)$ dla dowolnego $t \in G$. Z Lematu 3.1 wynika, że $\varrho(s)$ jest jednokładnością. Można więc zdefiniować homomorfizm $s \mapsto \lambda(s)$ z G w $\mathbb{C}^*$, gdzie $\lambda(s)$ jest współczynnikiem jednokładności $\varrho(s)$. Dla nieujemnej liczby całkowitej m utwórzmy iloczyn tensorowy reprezentacji:

$$\varrho^m : G^m \to \mathsf{GL}(\bigotimes_{i=1}^{m} V).$$

Jest to reprezentacja nieprzywiedlna grupy G^m (brakuje twierdzenia do odnośnika!).

Dla $(s_1, ..., s_m) \in \mathit{Cent}(G^m)$ przekształcenie ϱ^m jest jednokładnością o współczynniku $\lambda(\prod_{i=1}^{m} s_i)$. W takim razie podgrupa H grupy C^m, złożona z tych elementów, dla których $\prod_{i=1}^{m} s_i = 1$, działa trywialnie na V^m. Rozważając grupę ilorazową G^m/H dostajemy w ten sposób reprezentację nieprzywiedlną, której stopień n^m dzieli jej rząd $\frac{g^m}{c^{m-1}}$ (co wiemy z Wniosku 8.5). Mamy więc

$$(\frac{g}{cn})^m \in c^{-1}\mathbb{Z}$$

dla wszystkich $m \in \mathbb{N}_+$, więc liczba $\frac{g}{cn}$ jest całkowita. Co dowodzi tezy. □