

# Wprowadzenie do Compressed Sensing

Jagoda Miedzińska, Amelia Olejniczak, Marta Rapińska

March 2025

# 1 Wprowadzenie

Teoria *compressed sensing* przez ostatnie lata cieszy się dużym zainteresowaniem w różnych obszarach nauki. Jest to wciąż rozwijająca się dziedzina, dająca nowe możliwości przy rekonstrukcji danych z ograniczonej liczby pomiarów. *Compressed sensing* wychodzi z założenia, że sygnał można opisać (dokładnie lub w przybliżeniu) przy użyciu niewielu niezerowych współrzędnych, co daje możliwość odtworzenia tego sygnału przy stosunkowo niewielkiej liczbie pomiarów.

Niniejszy tekst stanowi proste wprowadzenie do podstawowych pojęć i zagadnień związanych z *compressed sensing* z perspektywy matematycznej. Przedstawiona jest w nim idea tej metody, zestawiona porównawczo z teorią próbkowania. Wyjaśnione są w niej również podstawowe założenia tj. rzadkość i kompresowalność, a także minimalna liczba pomiarów potrzebna do rekonstrukcji, wraz z wyjaśnieniem podstawowych pojęć. Następnie tekst zawiera skrótowe przedstawienie różnych algorytmów – metody optymalizacyjne, zachłanne oraz te oparte na progowaniu. Na koniec zaprezentowane jest kilka przykładów wykorzystania *compressed sensing* w praktyce.

## 2 Idea

Wyobraźmy sobie problem, że otrzymujemy sygnał, którego nie jesteśmy w stanie zmierzyć w całości. Sytuacja, w której przy pomocy zredukowanych danych chcemy odzyskać pełen sygnał jest tym, czym zajmuje się *compressed sensing*. Szukany sygnał możemy rozumieć jako wektor  $x \in \mathbb{C}^N$ , natomiast otrzymane dane jako  $y \in \mathbb{C}^m$ . Wtedy możemy zapisać, że

$$Ax = y$$

gdzie  $A$  to macierz o wymiarach  $m \times N$ . Można zauważyć, że w przypadku, gdy  $m \geq N$  to układ jest oznaczony, zatem możliwym do jednoznacznego rozwiązania. Sytuacja się komplikuje, kiedy  $m < N$ , ponieważ w takim przypadku mamy do czynienia z układem niedookreślonym, który nie pozwala na jednoznaczne zrekonstruowanie sygnału. Okazuje się jednak, że staje się on możliwy do odtworzenia przy odpowiednich założeniach rzadkości oraz kompresowalności, o których opowiemy w późniejszej części tekstu. [1]

### 2.1 Teoria klasycznego próbkowania

Ideę *compressed sensing* można porównawczo zestawić z teorią klasycznego próbkowania. Skupimy się na twierdzeniu Shannona-Nyquista.

Twierdzenie to zostało zaimplikowane przez Harry'ego Nyquista w 1928 roku w jego pracy, choć nie wspominał on o nim wprost. Pod koniec lat 40. XX wieku Claude Shannon udowodnił i zaprezentował je w dwóch artykułach naukowych. Mówi ono o tym, że do zapewnienia rekonstrukcji funkcji o paśmie  $B$  potrzebne jest próbkowanie z częstotliwością  $2B$ .

Transformata Fouriera sygnału w czasie ciągłym  $f \in L_1(\mathbb{R})$  jest zdefiniowana jako:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Mówimy, że sygnał  $f$  ma pasmo  $B$ , jeśli  $\hat{f}$  jest ograniczona do przedziału  $[-B, B]$ , czyli zeruje się wszędzie poza tym przedziałem. Twierdzenie Shannona-Nyquista stwierdza, że funkcję  $f$  o paśmie  $B$  można odtworzyć z jej dyskretnego zbioru próbek  $f(\frac{k}{2B})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  za pomocą wzoru:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2B}\right) \text{sinc}(2\pi Bt - \pi k),$$

gdzie funkcja sinc jest definiowana jako:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & \text{jeśli } t \neq 0, \\ 1, & \text{jeśli } t = 0. \end{cases}$$

W *compressed sensing* rozpatrujemy to twierdzenie w pewnej przestrzeni o skończonym wymiarze. Rozważmy wielomiany trygonometryczne o maksymalnym stopniu  $M$ , takie że:

$$f(t) = \sum_{k=-M}^M x_k e^{2\pi i k t}, \quad t \in [0, 1],$$

gdzie  $M$  jest odpowiednikiem pasma  $B$ . Przestrzeń takich wielomianów ma wymiar  $N = 2M + 1$ , a funkcja  $f$  może być odtworzona dla  $N = 2M + 1$  próbek. Twierdzenie Shannona-Nyquista dla wymiaru skończonego to:

$$f(t) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=0}^{2M} f\left(\frac{k}{2M+1}\right) D_M\left(t - \frac{k}{2M+1}\right), \quad t \in [0, 1],$$

gdzie  $D_M$  (jądro Dirichleta) jest definiowane jako:

$$D_M(t) = \sum_{k=-M}^M e^{2\pi i k t} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2M+1)t)}{\sin(\pi t)}, & \text{jeśli } t \neq 0, \\ 2M+1, & \text{jeśli } t = 0. \end{cases}$$

Wiemy zatem, że potrzebujemy  $2M + 1$  próbek do odtworzenia takich wielomianów trygonometrycznych o stopniu co najwyżej  $M$ . W praktyce takie wymagania byłyby zbyt duże, a wręcz niewykonalne obliczeniowo. Jeżeli jednak mamy wektor  $x \in \mathbb{C}^N$  współczynników Fouriera funkcji  $f$ , który jest rzadki i kompresowalny (co wytłumaczymy w następnym rozdziale) to wymagana liczba próbek może być już mniejsza.

Jeśli rozważymy zbiór punktów próbkowania  $\{t_1, \dots, t_m\} \in [0, 1]$  o  $m$  liczbie próbek oznaczających rzadkość, wektor  $y = (f(t_l))_{l=1}^m$  możemy przedstawić jako:

$$y = Ax,$$

gdzie  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  jest macierzą Fouriera z wyrazami:

$$A_{l,k} = e^{2\pi i k t_l}, \quad l = 1, \dots, m, \quad k = -M, \dots, M.$$

Wtedy do odtworzenia funkcji  $f$  z wektora  $y$  potrzebujemy znaleźć wektor współczynników  $x$ . Jeśli  $m < N$  to otrzymujemy układ niedookreślony i przy założeniu, że wektor  $x$  jest rzadki dochodzimy do standardowego problemu *compressed sensing*. [2]

### 3 Założenia

#### 3.1 Rzadkość i kompresowalność

Zanim będziemy mogli zająć się działaniem i zastosowaniem algorytmów, musimy wyjaśnić potrzebne założenia. Pierwszym z nich jest rzadkość, który intuicyjnie jest łatwy do zobrazowania - jest to wektor, którego większość wartości wynosi 0. Przedstawimy jednak bardziej formalną definicję tego pojęcia.

Oznaczmy przez  $[N]$  zbiór liczb naturalnych  $\{1, \dots, N\}$ . Załóżmy, że  $S$  to jakiś podzbiór  $[N]$  (zatem dopełnieniem jest zbiór  $[N]/S$ ).

**Definicja 3.1.** *Nośnikiem wektora  $x \in \mathbb{C}^N$  nazywamy zbiór indeksów, których wartości w wektorze są niezerowe. Zatem*

$$\text{supp}(x) := \{j \in [N] : x_j \neq 0\}$$

*Wektor nazywamy  $s$ -rzadkim, gdy co najwyżej  $s$  jego elementów jest niezerowa, inaczej:*

$$\|x\|_0 := |\text{supp}(x)| \leq s$$

Zazwyczaj w praktyce nie mamy do czynienia z wektorami rzadkimi, a jedynie takimi, które mogą zostać przybliżone przez wektory rzadkie. Możemy z takich wektorów korzystać, wykorzystując wtedy słabszy warunek kompresowalności.

Kompresowalność wykorzystuje własności błędu najlepszego  $s$ -elementowego przybliżenia, zatem aby móc dobrze wyjaśnić pojęcie kompresowalności potrzebujemy najpierw poznać definicję tego błędu.

**Definicja 3.2.** *Dla  $p > 0$   $\ell_p$ -błąd najlepszego  $s$ -elementowego przybliżenia dla wektora  $x \in \mathbb{C}^N$  jest zdefiniowany jako*

$$\sigma_s(x)_p := \inf\{\|x - z\|_p : z \in \mathbb{C}^N \text{ jest } s\text{-rzadki}\}$$

Zatem  $\sigma_s(x)_p$  odpowiada infimum osiąganemu przez  $s$ -rzadki wektor  $z \in \mathbb{C}^N$ , którego niezerowe współrzędne odpowiadają  $s$  największym wartościom bezwzględnym wektora  $x$ . Z tego względu nawet jeśli wektor  $z \in \mathbb{C}^N$  nie jest wyznaczony jednoznacznie, to osiąga infimum bez względu na wartość  $p > 0$ . Inaczej mówiąc - błąd ten mierzy, jak dobrze można przybliżyć sygnał  $x$  takim, który ma  $s$  niezerowych elementów.

Wektor nazywamy (nieformalnie) kompresowalnym gdy jego błąd najlepszego  $s$ -elementowego przybliżenia szybko zbiega do 0 dla  $s$  dążącego do  $N$ . Taka sytuacja w szczególności zachodzi, gdy wektor  $x$  należy do jednostkowej  $\ell_p$ -kuli dla niewielkich  $p > 0$ , gdzie kulę tę rozumiemy jako

$$B_p^N := \{z \in \mathbb{C}^N : \|z\|_p \leq 1\}$$

**Twierdzenie 3.1.** *Dla każdego  $q > p > 0$  i dowolnego  $x \in \mathbb{C}^N$  zachodzi nierówność*

$$\sigma_s(x)_q \leq \frac{1}{s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|x\|_p$$

Do dowodu powyższego twierdzenia potrzebujemy jeszcze jednej definicji.

**Definicja 3.3.** *Nierosnące uporządkowanie wektora  $x \in \mathbb{C}^N$  to taki wektor  $x^* \in \mathbb{R}^N$ , którego elementy spełniają warunek*

$$x_1^* \geq x_2^* \geq \dots \geq x_N^* \geq 0$$

*oraz istnieje permutacja  $\pi : [N] \rightarrow [N]$ , dla której  $x_j^* = |x_{\pi(j)}|$  dla każdego  $j \in [N]$*

*Dowód.* (Twierdzenie 3.1): Jeśli  $x^* \in \mathbb{R}_+^N$  jest nierosnącym uporządkowaniem wektora  $x \in \mathbb{C}^N$ , to możemy powiedzieć, że

$$\sigma_s(x)_q^q = \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^q = \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^{q-p} (x_j^*)^p$$

Ze względu na to, że  $x_s^* \geq x_j^* \forall j \geq s+1$  (co wynika z tego, że  $x^*$  jest nierosnącym uporządkowaniem) możemy zapisać poniższą nierówność

$$\sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^{q-p} (x_j^*)^p \leq (x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p$$

Z kolei dalej, jeśli zapiszemy, że  $(x_s^*)^{q-p}$  jako  $((x_s^*)^p)^{\frac{q-p}{p}}$  to możemy skorzystać, że dzięki temu, że  $x^*$  jest nierosnącym uporządkowaniem zachodzi nierówność:

$$s \cdot (x_s^*)^p \leq (x_1^*)^p + (x_2^*)^p + \dots + (x_s^*)^p$$

Z czego korzystamy aby zapisać

$$(x_s^*)^{q-p} \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \leq \left( \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \left( \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \right)$$

Co następnie korzystając z definicji

$$\|x\|_p^p := \sum_{j=1}^N |x_j|^p$$

możemy sprowadzić do postaci

$$\left( \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_j^*)^p \right)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \left( \sum_{j=s+1}^N (x_j^*)^p \right) \leq \left( \frac{1}{s} \|x\|_p \right)^{\frac{q-p}{p}} \|x\|_p^p = \frac{1}{s^{q/p-1}} \|x\|_p^q$$

Po spotęgowaniu przez  $\frac{1}{q}$  otrzymujemy ostateczny wynik. [1]  $\square$

Można jednak rozumieć kompresowalność w inny sposób. Drugą możliwością na definiowanie sygnałów kompresowalnych jest analiza tego, jak szybko maleją ich współczynniki. W naszym przypadku, gdy  $y = Ax$  i posortujemy współczynniki wektora sygnału  $x$  nierosnąco, tak że

$$|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_N|$$

to mówimy, że współczynniki te podlegają zanikowi potęgowemu, jeśli istnieją stałe  $C_1$  i  $q > 0$  takie, że:

$$|x_i| \leq C_1 \cdot i^{-q}$$

Wtedy dla większych  $q$  wartości współczynników maleją szybciej, a sygnał staje się bardziej kompresowalny. Ze względu na to, że wartości bezwzględne danych współczynników maleją bardzo szybko, to sygnały kompresowalne są dokładnie reprezentowane przez znacznie mniejszą liczbę współczynników niż faktyczna długość sygnału ( $s \ll N$ ).

Dla takich konkretnych przypadków istnieją stałe  $C_2$  oraz  $r > 0$  zależne jedynie od  $C_1$  oraz  $q$  takie, że

$$\sigma_2(x)_2 \leq C_2 s^{-r}$$

zatem sprowadza nas to do nierówności analogicznej, jak w twierdzeniu 3.1.

Intuicyjnie możemy powiedzieć, że jeśli współczynniki sygnału maleją szybko, to błąd najlepszego  $s$ -elementowego przybliżenia spada szybko wraz z  $s$ . Wiemy zatem, że im większe  $q$ , tym większe  $r$  i zarazem mniejszy błąd. [3]

### 3.2 Minimalna liczba pomiarów

Jak wspominaliśmy wcześniej, podstawową ideą *compressed sensing* jest odtwarzanie sygnału z małej liczby danych. Przypomnijmy, że problem ten można przedstawić jako:

$$Ax = y,$$

gdzie  $x \in \mathbb{C}^N$ ,  $y \in \mathbb{C}^m$ , a macierz  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  jest nazywana "macierzą pomiarów". Dla  $m < N$  mamy do czynienia z układem niedookreślonym, ale przy wykorzystaniu założeń o rzadkości i kompresowalności wektora  $x$  jesteśmy w stanie znaleźć rozwiązanie tego układu, czyli odtworzyć szukany sygnał. Powstaje natomiast pytanie: ile minimalnie pomiarów potrzeba, żeby to osiągnąć?

Postawiony powyżej problem będziemy rozpatrywać bez brania pod uwagę praktyczności ani optymalności algorytmów obliczeniowych. Wyróżnia się dwa podejścia do rekonstrukcji  $s$ -rzadkich wektorów:

- (1) odtworzenie wszystkich  $s$ -rzadkich wektorów  $x \in \mathbb{C}^N$  jednocześnie,
- (2) mamy dany  $s$ -rzadki wektor i mamy schemat, który potrafi konkretnie jego odtworzyć.

Okazuje się, że minimalna liczba pomiarów potrzebnych w pierwszym przypadku wynosi  $2s$ , a w drugim  $s+1$ . Drugie podejście może się wydawać nienaturalne, ponieważ zazwyczaj wektor  $x$  nie jest początkowo znany, ale okazuje się, że jest ono faktycznie ważne i użyteczne, kiedy schemat opiera się na losowej macierzy  $A$  oraz ustalonym rzadkim wektorze  $x$ .

Ogólnie, przy podanych  $s$ , macierzy  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  i  $s$ -rzadkiego wektora  $x \in \mathbb{C}^N$  poniższe problemy są równoważne:

- wektor  $x$  jest unikalnym rozwiązaniem  $Az = y$  przy  $Ax = y$  takim, że

$$\{z \in \mathbb{C}^N : Az = Ax, \|z\|_0 \leq s\} = \{x\},$$

- wektor  $x$  może być odtworzony jako unikalne rozwiązanie minimalizacji

$$\min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y$$

### Rekonstrukcja wszystkich $s$ -rzadkich wektorów

Wprowadźmy przydatne oznaczenia. Niech  $A_S$  będzie podmacierzą  $A$ , której kolumny pochodzą ze zbioru  $S \subset [N]$ . Analogicznie wektor  $x_S$  jest podwektorem  $x$ , składającym się z wartości pod indeksami ze zbioru  $S$ .

Wtedy mamy:

**Definicja 3.4.** Dla macierzy  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  następujące warunki są równoważne:

- Każdy  $s$ -rzadki wektor  $x \in \mathbb{C}^N$  jest unikalnym  $s$ -rzadkim rozwiązaniem  $Az = Ax$ , czyli jeśli  $Az = Ax$  i  $z$ ,  $x$  są  $s$ -rzadkie, to  $z = x$ .
- Przestrzeń zerowa  $\ker A$  nie zawiera żadnego  $2s$ -rzadkiego wektora oprócz wektora zerowego, czyli  $\ker A \cap \{z \in \mathbb{C}^N : \|z\|_0 \leq 2s\} = \{0\}$ .
- Dla każdego zbioru  $S \subset [N]$ , którego moc jest nie większa niż  $2s$ , podmacierz  $A_S$  jest macierzą przekształcenia "1-1".
- Każdy zbiór  $2s$  kolumn macierzy  $A$  jest liniowo niezależny.

W szczególności zauważamy, że jeśli możliwe jest odtworzenie każdego  $s$ -rzadkiego wektora  $x \in \mathbb{C}^N$  na podstawie  $y = Ax \in \mathbb{C}^m$ , to pierwsza własność zachodzi, a co za tym idzie również czwarta. Wynika z tego, że  $\text{rank}(A) \geq 2s$ . Wiemy też, że rząd macierzy może być co najwyżej równy liczbie jej wierszy, stąd mamy:

$$2s \leq \text{rank}(A) \leq m$$

Zobaczmy teraz, że (przynajmniej w teorii) wystarczy  $m = 2s$  pomiarów, żeby odtworzyć każdy  $s$ -rzadki wektor.

**Definicja 3.5.** <sup>1</sup> Dla każdej liczby  $N \geq 2s$  istnieje macierz pomiarów  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  z  $m = 2s$  wierszami taka, że każdy  $s$ -rzadki wektor może być odtworzony z wektora pomiarów  $y = Ax \in \mathbb{C}^m$  jako rozwiązanie problemu:

$$\min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y$$

**Definicja 3.6.** <sup>2</sup> Dla każdego  $N \geq 2s$  istnieje praktyczna procedura do rekonstrukcji każdego  $2s$ -rzadkiego wektora z jego pierwszych  $m = 2s$  dyskretnych pomiarów Fouriera.

Na podstawie powyższych twierdzeń wiemy, że w teorii faktycznie wystarczy nam  $m = 2s$  pomiarów. Niestety, algorytm reprezentujący taką procedurę byłby niestabilny, czyli błąd w danych wyjściowych byłby nieproporcjonalnie większy niż przy danych wejściowych, a ten mógłby wynikać m.in. z błędów pomiarowych. Okazuje się zatem, że do możliwości skorzystania ze stabilnego algorytmu potrzebaby jednak więcej pomiarów.

### Rekonstrukcja konkretnego $s$ -rzadkiego wektora

W tym podejściu  $s$ -rzadki wektor  $x \in \mathbb{C}^N$  jest ustalony przed wybraniem macierzy pomiarów  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ . Warunki zapewniające to, żeby  $x$  był  $s$ -rzadkim i unikalnym wektorem zgodnym z pomiarami  $A$  zależą zarówno od  $A$ , jak i  $x$ . Może to wyglądać nienaturalnie, bo początkowo nie znamy wektora  $x$ , ale ma to sens, bo warunki te są spełnione dla większości macierzy  $(s+1) \times N$ . Rozważenie tego podejścia jest zatem przydatne, ponieważ macierz  $A$  jest często wybierana losowo.

**Definicja 3.7.** <sup>3</sup> Dla każdej liczby  $N \geq s+1$  mając  $s$ -rzadki wektor  $x \in \mathbb{C}^N$  istnieje macierz pomiarów  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  z  $m = s+1$  wierszami taka, że każdy  $s$ -rzadki wektor może być odtworzony z wektora pomiarów  $y = Ax \in \mathbb{C}^m$  jako rozwiązanie problemu:

$$\min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y$$

[1]

## 4 Algorytmy

### 4.1 Metody optymalizacji

Problem optymalizacji to problem typu:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} F_0(x) \quad \text{gdzie} \quad F_i(x) \leq b_i, 1 \leq i \leq n$$

---

<sup>1</sup> Dowód: theorem 2.14 w [1]   <sup>2</sup> Dowód: theorem 2.15 w [1]   <sup>3</sup> Dowód: theorem 2.16 w [1]

Ponadto  $F_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  to funkcja celu, a  $F_1, F_2, \dots, F_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  to funkcje ograniczeń. Jeśli funkcje  $F_0, F_1, \dots, F_n$  są funkcjami wypukłymi, to problem jest nazywany wypukłym problemem optymalizacji. Natomiast jeśli funkcje  $F_0, F_1, \dots, F_n$  są funkcjami liniowymi, wtedy problem jest nazywany liniowym.

Problem rzadkości wygląda następująco:

$$\min \|z\|_0 \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y \quad (P_0)$$

Jest to wklęsły problem (NP-trudny).  $\|z\|_q^q$  zbliża się do  $\|z\|_0$  wtedy, gdy  $q > 0$  zbiega do zera, można aproksymować  $(P_0)$  przez:

$$\min \|z\|_q \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y \quad (P_q)$$

Dla  $q > 1$  nawet wektory 1-rzadkie nie są rozwiązaniem  $(P_q)$ . Dla  $0 < q < 1$   $(P_q)$  jest ponownie problemem wklęsłym (NP-trudnym). Natomiast dla wartości krytycznej  $q = 1$  to problem wypukły:

$$\min \|z\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y \quad (P_1)$$

Powiązana metoda to minimalizacja  $\ell_1$ :

$$x^\# = \arg \min \|z\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad Az = y \quad (BP)$$

Wynikiem jest  $x^\#$ .

**Twierdzenie 4.1.**  $A \in \mathbb{R}^{m \times N}$  to macierz pomiaru kolumny:  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , zakładając unikalność rozwiązania:  $x^\# : \min_{z \in \mathbb{R}^N} \|z\|_1$  pod warunkiem  $Az = y$  wtedy:  $a_j : j \in \text{supp } x^\#$  jest liniowo niezależny, w szczególności:  $\|x^\#\|_0 = \text{card}(\text{supp } x^\#) \leq m$ .

W środowisku rzeczywistym warto wspomnieć, że  $(P_1)$  można przekształcić w problem liniowy wprowadzając zmienne:  $z^+, z^- \in \mathbb{R}^N$ :

$$z_j^+ = \begin{cases} z_j & \text{dla } z_j > 0 \\ 0 & \text{dla } z_j \leq 0 \end{cases} \quad z_j^- = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_j > 0 \\ -z_j & \text{dla } z_j \leq 0 \end{cases}$$

Wtedy:

$$\min_{z^+, z^- \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N (z_j^+ + z_j^-) \quad [A|A^-] \begin{bmatrix} z^+ \\ z^- \end{bmatrix} = y \quad \begin{bmatrix} z^+ \\ z^- \end{bmatrix} \geq 0 \quad (P'_1)$$

Rozwiązaniami są:  $(x^+)^*, (x^-)^*$ . Wtedy:  $x^* = (x^+)^* - (x^-)^*$ . Takie rozwiązania nie sprawdzają się w środowisku zespolonym.

Stosujemy wtedy bardziej ogólną metodę:

$$\min \|z\|_1 \quad \text{pod warunkiem} \quad \|Az - y\|_2 \leq \eta \quad (P_{1,\eta})$$

Jest to bardziej naturalne podejście, ponieważ wektor  $y \in \mathbb{C}^m \neq Ax \in \mathbb{C}^m$ , lecz raczej  $Ax + e$  dla  $e \in \mathbb{C}^m$ , gdzie  $e$  to błąd, który może być estymowany za pomocą normy  $\ell_2$  :  $\|e\|_2 \leq \eta$  dla  $\eta \geq 0$ . Wtedy biorąc wektor  $z \in \mathbb{C}^N$  wprowadzamy części rzeczywistą i urojoną  $u, v \in \mathbb{R}^N$  i wektor  $c \in \mathbb{R}^N$ .

$$c_j \geq |z_j| = \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \quad \text{dla } j \in [N]$$

Problem  $(P_{1,\eta})$  jest równoważny:

$$\min_{c, u, v \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N c_j \quad \text{pod warunkiem} \quad \left\| \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(A) & -\operatorname{Im}(A) \\ \operatorname{Im}(A) & \operatorname{Re}(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(y) \\ \operatorname{Im}(y) \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \eta \quad (P'_{1,\eta})$$

$$\begin{aligned} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} &\leq c_1, \\ &\vdots \\ \sqrt{u_N^2 + v_N^2} &\leq c_N \end{aligned}$$

Rozwiązaniami są:  $(c^*, u^*, v^*)$ . Więc rozwiązaniem  $(P_{1,\eta})$  jest:  $x^* = u^* + iv^*$ . [1]

## 4.2 Metody zachłanne

W tej części opiszemy dwa algorytmy zachłanne, wykorzystywane do rekonstrukcji sygnału.

1. Ortogonalny algorytm dopasowania (OMP – *Orthogonal Matching Pursuit*)
2. Metoda dopasowania próbkowaniem kompresyjnym (CoSaMP – *Compressed Sampling Matching Pursuit*)

Pierwszy z nich, OMP, w uproszczeniu – polega on na dodawaniu odpowiednich indeksów do nośnika  $S^n$  w każdej iteracji, a następnie aktualizacji szukanego wektora  $x^n$  opierając go na indeksach z nośnika  $S^n$  (zatem wektor  $x^n$  będzie posiadał niezerowe wartości jedynie dla indeksów ze zbioru  $S^n$ ) w taki sposób, że najlepiej odpowiada zadanym pomiarom.

Algorytm ten możemy formalnie opisać w następujący sposób:

**Wejście:** macierz pomiarowa  $A$ , wektor pomiarowy  $y$ .

**Inicjalizacja:**  $S^0 = \emptyset$ ,  $x^0 = 0$ .

**Iteracja:** Powtarzaj następujące kroki aż do spełnienia końcowego kryterium przy  $n = \bar{n}$ :

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= S^n \cup \{j_{n+1} := \arg \max\{|(A^*(y - Ax^n))_j|, j \in [N]\}\}, \\ x^{n+1} &= \arg \min\{\|y - Az\|_2, \operatorname{supp}(z) \subseteq S^{n+1}\}. \end{aligned}$$

**Wyjście:**  $\bar{n}$ -rzadki wektor  $x^\# = x^{\bar{n}}$ .

W przypadku OMP drugi z kroków w iteracji jest bardzo kosztowny obliczeniowo. Można go przyspieszyć przez wykorzystanie rozkładu QR na macierzy  $A_{S^n}$ . Inaczej – zapisanie macierzy  $A_{S^n}$  jako iloczyn macierzy ortogonalnej  $Q$  oraz macierzy górnotrójkątnej  $R$ . Istnieją efektywne metody rozkładu  $QR$  podczas dodawania kolumn do macierzy.

Wybór indeksu  $j_{n+1}$  jest związany z zachłanną strategią, gdzie z każdą iteracją dążymy do minimalizacji normy  $\ell_2$  residuum  $y - Ax^n$  najbardziej jak to możliwe.

Jako warunek końcowy, pierwszym naturalnym wyborem byłoby  $Ax^{\bar{n}} = y$ , jednak częściej wykorzystywany jest mniej restrykcyjny warunek  $\|y - Ax^{\bar{n}}\|_2 \leq \epsilon$  i  $\|A^*(y - Ax^{\bar{n}})\|_\infty \leq \epsilon$  dla ustalonego błędu  $\epsilon$ . Jeśli natomiast mamy estymowaną rzadkość  $s$  sygnału  $x \in \mathbb{C}^N$  to jest on dobrym wyborem końcowego warunku, ponieważ wtedy otrzymany wektor jest  $s$ -rzadki.

Pewną słabością algorytmu OMP jest brak możliwości usunięcia raz błędnie wybranego indeksu – jeśli indeks do nośnika  $S^n$  zostanie raz błędnie wybrany, to pozostaje on do końca tzn. dla każdego  $S^{n'}$ , gdzie  $n' \geq n$ . Może to sprawić, że wybrana liczba iteracji  $s$  nie da poprawnego rozwiązania (tj.  $s$ -rzadkiego wektora  $x$ ). Intuicyjnym rozwiązaniem jest zwiększenie liczby iteracji, jednak istnieją lepsze algorytmy zachłanne, które radzą sobie z tym problemem. [2]

Warto również wspomnieć, że dotychczas w większości analiza tego algorytmu zachodziła przy założeniu, że kolumny macierzy pomiarowej  $A$  mają tę samą normę  $\ell_2$ . Symulacje pokazują jednak, że OMP działa również dobrze, gdy normy w kolumnach są bardzo bliskie, co jest bardziej adekwatne do prawdziwych sytuacji z jakimi możemy się spotkać. Możemy również zobaczyć, że działanie OMP pogarsza się, gdy normy kolumn macierzy  $A$  są bardziej od siebie oddalone. Jest to zatem dobry algorytm przede wszystkim w rozumowaniach teoretycznych. [4]

Druga z zachłannych metod (CoSaMP) radzi sobie z wcześniej podanym problemem algorytmu OMP. Jest ona bardzo przydatna, gdy estymujemy sygnał, znając wartość rzadkości  $s$  (prawdziwą lub przybliżoną). Do opisanego algorytmu potrzebujemy jednak wprowadzić odpowiednie oznaczenia.

- $H_s(\mathbf{z})$  – najlepsze  $s$ -elementowe przybliżenie  $z \in \mathbb{C}^N$
- $L_s(\mathbf{z})$  – zbiór indeksów odpowiadającym  $s$  największym (co do modułu) elementom  $z \in \mathbb{C}^N$

Inaczej  $H_s(\mathbf{z}) = \mathbf{z}_{L_s(\mathbf{z})}$  zatem jest to wektor zawierający jedynie  $s$  największych (co do modułu) elementów wektora  $z$ , a w pozostałych miejscach umieszczamy zera. Formalnie  $H_s$  opisujemy jako operator *hard thresholding* (twardego progowania). Warto zaznaczyć, że ten operator może nie być wyznaczony jednoznacznie. Wybieramy wtedy zbiór indeksów według ustalonej reguły (na przykład według kolejności leksykograficznej).

Formalnie algorytm CoSaMP prezentuje się następująco:

**Wejście:** macierz pomiarowa  $A$ , wektor pomiarowy  $y$ , poziom rzadkości  $s$ .

**Inicjalizacja:**  $s$ -rzadki wektor  $x^0$  (zazwyczaj  $x^0 = 0$ ).

**Iteracje:** Powtarzaj następujące kroki aż do spełnienia końcowego kryterium przy  $n = \bar{n}$ :

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \text{supp}(x^n) \cup L_{2s}(A^*(y - Ax^n)), \\ u^{n+1} &= \arg \min\{\|y - Az\|_2, \text{supp}(z) \subseteq U^{n+1}\}, \\ x^{n+1} &= H_s(u^{n+1}). \end{aligned}$$

**Wyjście:**  $s$ -rzadki wektor  $x^\# = x^{\bar{n}}$

Tłumacząc intuicyjnie: w pierwszym kroku uwzględniamy sumę nośnika dotychczasowego rozwiązania ze zbiorem indeksów odpowiadającym  $2s$  największym niezerowym współczynnikom residuum. Następnie patrzymy na wektor minimalizujący błąd kwadratowy przybliżenia  $y$ , ale taki, którego współrzędne znajdują się we wcześniej wyznaczonym zbiorze  $U$ . Na koniec wyznaczamy najlepsze  $s$ -elementowe przybliżenie wyznaczonego wektora. [1]

Powyższy algorytm eliminuje główny problem OMP, ponieważ tutaj dzięki wyborom indeksów z sumy zbiorów, możemy naprawić błędnie dobrane wcześniej indeksy. CoSaMP jest to algorytm stworzony jako pewne rozwinięcie OMP. Daje on większą stabilność i jest lepszy do praktycznych zastosowań. [5]

### 4.3 Metody oparte na progowaniu

W tej sekcji przyjrzymy się bliżej algorytmom wykorzystującym operator *hard thresholding* (twardego progowania)  $H_s$ .

Algorytmy te opierają się na przybliżeniu odwrócenia działania macierzy  $A$  na rzadkich wektorach przez działanie macierzy  $A^*$ , będącej jej sprzężeniem hermitowskim. Wtedy podstawowy algorytm progowania (*basic thresholding*, BT) polega na wyznaczeniu nośnika  $s$ -rzadkiego wektora  $x \in \mathbb{C}^N$ , który ma zostać odtworzony na podstawie wektora pomiarowego  $y = Ax \in \mathbb{C}^m$ , jako zbioru indeksów odpowiadających  $s$  największym co do modułu współczynnikom wektora  $A^*y$ . Następnie wyznaczany jest taki wektor o tym nośniku, który najlepiej dopasowuje się do danych pomiarowych.

Formalnie opisujemy ten algorytm jak poniżej:

**Wejście:** macierz pomiarowa  $A$ , wektor pomiarowy  $y$ , poziom rzadkości  $s$ .

**Instrukcja:**

$$\begin{aligned} S^\# &= L_s(A^*y) \\ x^\# &= \arg \min\{\|y - Az\|_2, \text{supp}(z) \subseteq S^\#\}. \end{aligned}$$

**Wyjście:**  $s$ -rzadki wektor  $x^\#$ .

Do zapewnienia sukcesu odtworzenia  $s$ -rzadkiego wektora używając tego algorytmu możemy wskazać następujący konieczny i wystarczający warunek.

**Warunek 4.1.** Wektor  $x \in \mathbb{C}^N$  o nośniku  $S$  jest odtworzony z  $y = Ax$  za pomocą podstawowego progowania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min_{j \in S} |(A^*y)_j| > \max_{\ell \notin S} |(A^*y)_\ell|.$$

Bardziej rozbudowanym algorytmem jest iteratywny algorytm z progowaniem twardym (*iterative hard thresholding*, IHT). Algorytm ten służy do rozwiązywania prostokątnego układu równań  $Az = y$ , wiedząc, że rozwiązanie jest  $s$ -rzadkie. Zamiast układu prostokątnego rozwiążemy układ kwadratowy

$$A^*Az = A^*y,$$

który można interpretować jako równanie punktu stałego

$$z = (Id - A^*A)z + A^*y,$$

które otrzymaliśmy przez proste przekształcenia. Z klasycznych metod iteracji punktu stałego mamy

$$x^{n+1} = (Id - A^*A)x^n + A^*y.$$

Ponieważ wiemy, że celem są  $s$ -rzadkie wektory, w każdej iteracji zachowujemy jedynie  $s$  największych co do modułu współczynników wektora

$$(Id - A^*A)x^n + A^*y = x^n + A^*(y - Ax^n).$$

Taki algorytm przedstawia się następująco:

**Wejście:** macierz pomiarowa  $A$ , wektor pomiarowy  $y$ , poziom rzadkości  $s$ .

**Inicjalizacja:**  $s$ -rzadki wektor  $x^0$  (zazwyczaj  $x^0 = 0$ ).

**Iteracje:** Powtarzaj następujące kroki aż do spełnienia końcowego kryterium przy  $n = \bar{n}$ :

$$x^{n+1} = H_s(x^n + A^*(y - Ax^n)).$$

**Wyjście:**  $s$ -rzadki wektor  $x^\# = x^{\bar{n}}$ .

Algorytm IHT nie wymaga liczenia żadnych rzutów ortogonalnych. Gdybyśmy byli jednak skłonni zapłacić cenę takich rzutów, jak w przypadku algorytmów zachłannych, to moglibyśmy w każdej iteracji znaleźć wektor z tym samym nośnikiem co  $x^{n+1}$ , który najlepiej pasuje do pomiarów. Takie podejście prowadzi do algorytmu poszukiwania z progowaniem twardym (*hard thresholding pursuit*, HTP) opisanego poniżej:

**Wejście:** macierz pomiarowa  $A$ , wektor pomiarowy  $y$ , poziom rzadkości  $s$ .

**Inicjalizacja:**  $s$ -rzadki wektor  $x^0$  (zazwyczaj  $x^0 = 0$ ).

**Iteracje:** Powtarzaj następujące kroki aż do spełnienia końcowego kryterium przy  $n = \bar{n}$ :

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= L_s(x^n + A^*(y - Ax^n)), \\ x^{n+1} &= \operatorname{argmin}\{\|y - Az\|_2, \operatorname{supp}(z) \subseteq S^{n+1}\}. \end{aligned}$$

**Wyjście:**  $s$ -rzadki wektor  $x^\# = x^{\bar{n}}$ .

Jeśli chodzi o wyznaczenie lub porównanie wydajności powyższych trzech algorytmów, czyli ich sukcesu odtworzenia szukanego wektora oraz czasu działania, to należałoby to sprawdzić przy pomocy testów numerycznych. Bez nich jesteśmy jednak w stanie podać ogólne ramy spodziewanych wyników.

Dla małych  $s$  algorytm HTP jest szybki, ponieważ każda iteracja oblicza rzut ortogonalny względem macierzy  $A_S$ , gdzie  $S \subset [N]$  jest zbiorem o niewielkiej liczbie elementów. Liczba iteracji może być raczej niezależna od  $s$ . Rzadkość  $s$  nie ma natomiast praktycznie żadnego znaczącego wpływu na czas działania algorytmu IHT.

Algorytm BT jest najszybszy spośród wszystkich algorytmów, ponieważ wyznacza nośnik wektora już w jednym kroku, ale jego skuteczność odtwarzania jest zazwyczaj znacznie gorsza niż dla pozostałych metod. [1]

## 5 Przykłady zastosowania

### 5.1 Obrazowanie fotoakustyczne

Obrazowanie fotoakustyczne (PAI) jest wykorzystywane w celach biomedycznych takich jak: diagnostyka nowotworów, chorób układu krążeniowo-naczyniowego czy wykrycie urazów mózgu. Jest to technika hybrydowa łącząca w sobie zalety obrazowania akustycznego i optycznego. PAI polega na naświetlaniu substancji/tkanki laserem, następnie naświetlona powierzchnia oraz jej otoczenie absorbuje energię, konwertując ją w ciepło. To powoduje zmiany ciśnienia, które zapoczątkowują powstanie i rozprzestrzenianie się fali akustycznej. Wykrycie tego fotoakustycznego sygnału pozwala na rekonstrukcję obrazów naświetlanych regionów. Jednak obrazowanie fotoakustyczne posiada pewne ograniczenia, a w ich przezwyciężeniu może pomóc wykorzystanie compressed sensing (CS). Jednym z problemów w trakcie obrazowania tkanek jest ograniczony kąt widzenia, co często uniemożliwia otrzymanie 360° pokrycia. W ten sposób otrzymujemy niepełną informację, co skutkuje pogorszeniem jakości i trafności. Wykorzystanie CS prowadzi do rekonstrukcji sygnału i poprawy jakości obrazowania. Kolejnym problemem jest brak możliwości obrazowania w czasie rzeczywistym. Jest to spowodowane dużą ilością informacji, której przetworzenie jest bardzo czasochłonne. Użycie CS może przyspieszyć procesowanie sygnału, a co za tym idzie szybsze otrzymanie pożądaných wyników. Co więcej, CS może pozwolić

zaoszczędzić środki na sprzęt i przestrzeń do przechowywania informacji. CS wymaga dużo mniej punktów próbkowania, co powoduje redukcję potrzebnego sprzętu. Mniejsza objętość informacji zaoszczędza przestrzeń i obniża koszty operacyjne systemów PAI. Ostatecznie CS poprawia jakość i trafność obrazowania fotoakustycznego, ponieważ może przywrócić sygnały o wysokiej jakości za pomocą algorytmów optymalizacyjnych. Poprawa trafności powoduje większą wiarygodność wyników.[6]

## 5.2 Rezonans magnetyczny

Rezonans magnetyczny (MRI) jest również wykorzystywany w medycynie do obrazowania mózgu, naczyń krwionośnych, serca i wielu innych narządów. Wykorzystując tradycyjne podejście potrzebne jest bardzo dużo czasu, aby otrzymać obrazy o wysokiej rozdzielczości, co często bywa nierealistyczne w różnych sytuacjach klinicznych. MRI polega na interakcji protonów wodoru zawartych w cząsteczkach wody w ciele z silnym polem magnetycznym. Statyczne pole magnetyczne polaryzuje spin (moment pędu) protonów, co powoduje powstanie momentu magnetycznego. Zastosowanie dodatkowego wzbudzenia o częstotliwości radiowej powoduje powstanie magnetyzacji poprzecznej do statycznego pola. Powstałe pole elektromagnetyczne jest wykrywane za pomocą sensorów. Magnetyzacja poprzeczna zależy od fizycznych właściwości tkanki np. gęstości protonowej, a to pozwala na rekonstrukcję obrazu tkanek za pomocą mierzonego sygnału. W ujęciu matematycznym można to przedstawić w następujący sposób:

Poprzeczna magnetyzacja:

$$X(z) = |X(z)|e^{-i\phi(z)}$$

gdzie  $z \in \mathbb{R}^3$ ,  $|X(z)|$  to magnituda, a  $\phi(z)$  to faza. Dodatkowe prawdopodobnie zależne od czasu pole magnetyczne jest zaprojektowane tak, aby zależało liniowo od pozycji, a co za tym idzie nazywane jest polem gradientowym. Oznaczając przez  $G \in \mathbb{R}^3$  gradient, funkcja pozycji wygląda następująco:

$$\omega(z) = k(B + \langle G, z \rangle), z \in \mathbb{R}^3$$

gdzie  $B$  to siła pola statycznego, a  $\kappa$  to stała fizyczna. Wraz z gradientem zależnym od czasu  $G = G(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , faza magnetyczna:  $\phi(z) = \phi(z, t)$  jest całką:

$$\phi(z, t) = 2\pi\kappa \int_0^t G(r) \cdot z dr$$

gdy  $t = 0$  odpowiada to czasowi wzbudzenia częstotliwości radiowej. Wprowadzając funkcję  $k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  za pomocą:

$$k(t) = \kappa \int_0^t G(u) du$$

Należy po całkować po całej objętości przestrzennej i dokonać pomiaru sygnału:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |X(z)| e^{-2\pi i k(t) \cdot z} dz = \mathcal{F}(|X|)(k(t))$$

gdzie  $\mathcal{F}(|X|)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} |X(z)| e^{-2\pi i \xi \cdot z} dz$  opisuje 3-wymiarową transformatę Fouriera wartości bezwzględnej  $|X|$  magnetyzacji. Możliwy jest również pomiar 2-wymiarowych płatów próbek, wtedy transformata 3-wymiarowa zamieniana jest na 2-wymiarową. Powtarzając wzbudzenia kilkoma różnymi częstotliwościami radiowymi z różnymi parametrami, otrzymujemy próbki transformaty Fouriera dla  $M$  (obrazu) z odpowiednio kilkoma krzywymi:  $k_1, k_2, \dots, k_L \in \mathbb{R}^3$ . Wymagany czas pomiaru jest proporcjonalny do liczby krzywych ( $L$ ) i optymalnym jest praca z minimalną liczbą  $L$ . Naturalna dyskretyzacja reprezentuje każdy element objętości lub przestrzeni (w przypadku pomiarów 2-wymiarowych) odpowiednio za pomocą pojedynczego woksela lub piksela, dzięki temu magnetyzacja  $|X|$  przyjmuje postać skończonego wektora  $X \in \mathbb{R}^N$ . Należy również dokonać dyskretyzacji krzywych  $k_1, k_2, \dots, k_L$ , wtedy zmierzone dane stają się 3-wymiarową dyskretną transformatą Fouriera dla  $x$ :

$$(\mathcal{F}x)_k = \sum_{l \in Q} x_l e^{-2\pi i k \cdot l / M}, k \in [M]^3$$

Niech  $K \subset [M]^3 = Q$ , gdzie moc  $K$  jest równa  $m$ , opisuje zbiór dyskretnych przestrzeni częstotliwości  $Q$ , pokrytej trajektoriami  $k_1, k_2, \dots, k_L$ . Wtedy wektor  $y$  (odbierany sygnał) odpowiada:

$$y = R_k \mathcal{F}x = Ax$$

gdzie  $R_k$  jest liniowym odwzorowaniem, które ogranicza wektor indeksowany przez  $Q$  do jego współrzędnych o indeksach należących do  $K$ .

Wyzwaniem jest ustalenie dobrego zbioru próbek  $K$  o małej mocy  $m$ , zapewniając tym samym odtwarzalność "rzadkich" obrazów  $x$ . W praktyce zbiory  $K$  są wyznaczane empirycznie. Jednym ze sposobów jest wybranie równoległych trajektorii w  $\mathbb{R}^3$ , których przecięcie z pewną płaszczyzną współrzędnych jest wybierane losowo.[1] [7]

Obrazy MRI zazwyczaj nie są "rzadkie" w swojej oryginalnej przestrzennej dziedzinie, aby zastosować CS potrzebna jest transformacja w takie domeny jak: oscylacja falowa czy Fourier. To oznacza, że większość sygnałów energii jest skoncentrowanych na kilku znaczących współczynnikach, a reszta jest bliska zero lub nieistotna.

W konwencjonalnym MRI przestrzeń  $k$ -wymiarowa jest próbkowana w jednolitej siatce. Natomiast CS MRI używa pseudolosowych schematów próbkowania bądź o zmiennej gęstości, w szczególności pomijając komponenty o wysokiej częstotliwości, zachowując przy tym centralne  $k$ -wymiarowe regiony o niskiej częstotliwości.

Rekonstrukcja CS MRI wymaga rozwiązania problemu optymalizacji możliwie "najrzadszego" obrazu spójnego z danymi. Zazwyczaj wykorzystywana jest:

- minimalizacja normy  $\ell_1$ : promuje "rzadkość",
- minimalizacja normy  $\ell_2$ : zapewnia spójność z danymi.[8]

### 5.3 Radar

Antena wysyła specjalnie zaprojektowaną falę elektromagnetyczną - impuls radarowy, który jest rozpraszany na obiekty w najbliższym otoczeniu, np. samoloty. Antena odbierająca mierzy sygnał elektromagnetyczny powstały po odbiciu się fal od tych obiektów. Bazując na czasie opóźnienia otrzymanego sygnału można ustalić odległość obiektów oraz z wykorzystaniem efektu Dopplera również ich prędkość. Poniżej opiszę prosty model o skończonym wymiarze:

$$B = \sum_{(k,l) \in [m]^2} x_{k,l} T_k M_l$$

gdzie translacja odpowiada za opóźnienie, model modulacji odpowiada za efekt Dopplera, a wektor  $x = x_{k,l}$  to odbierany sygnał. Niezerowe rekordy  $x_{k,l}$  pojawiają się wtedy, gdy w otoczeniu pojawia się obiekt w odległości  $i$  o prędkości zgodnej z translacją  $T_k$  i modulacją  $M_l$ . Tylko nieliczne obiekty są obecne w badanym otoczeniu, co skutkuje "rzadkością" współczynników wektora  $x$ . Celem jest ustalenie wektora  $x$ . Odbierany sygnał dany jest następującym wzorem:

$$y = Bg = \sum_{(k,l) \in [m]^2} x_{k,l} T_k M_l g = A_g x$$

gdzie  $g \in \mathbb{C}^m$ ,  $m^2$  kolumn macierzy pomiarowej  $A_g \in \mathbb{C}^{m \times m^2}$  jest dane przez  $T_k M_l g$  i  $(k, l) \in [m]^2$ .

Do rekonstrukcji wektora  $x$  wykorzystywane są algorytmy minimalizacji  $\ell_1$ . Istotne jest, aby dobrać odpowiednie sekwencje impulsów radiowych  $g \in \mathbb{C}^m$ , które pozwolą później odtworzyć wektor  $x$  z  $y = Bg$ . Popularnym wyborem jest wektor Alltop (deterministyczny):

$$g_l = e^{2\pi i l^3 / m}$$

gdzie  $l \in [m]$  oraz  $m \geq 5$ .

Alternatywą jest wektor Bernoulliego.[1]

## Literatura

- [1] S. Foucart, H. Rauhut, A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, *Applied and Numerical Harmonic Analysis*, Springer, 2013
- [2] L.J. Zhang, A Friendly Introduction to Compressed Sensing, Undergraduate Honors Thesis, University of California San Diego, 2021

- [3] M.A. Davenport, M.F. Duarte, Y.C. Eldar, G. Kutyniok, Introduction to Compressed Sensing, *Cambridge University Press*, 2012
- [4] H. Masoumi, M. Verhaegen, N.J. Myers, Analysis of Orthogonal Matching Pursuit for Compressed Sensing in Practical Settings, *Proceedings of IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, 170–174, 2023
- [5] D. Needell, J.A. Tropp, CoSaMP: Iterative Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Samples, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2008
- [6] Y. Wang, Y. Chen, Y. Zhao, S. Liu, Compressed Sensing for Biomedical Photoacoustic Imaging: A Review, *Sensors* 24(2670), 2024
- [7] J. C. Ye, Compressed sensing MRI: a review from signal processing perspective, *BMC Biomedical Engineering*, 1(8), 2019
- [8] “Compressed Sensing CS-MRI,” MRI Master (źródło online), dostęp: 2025  
URL: <https://mrimaster.com/compressed-sensing-cs-mri/>