

Układ Lorenza

Bartosz Grzesiak, Ewa Kozak, Benedikt Žurek
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

2026

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Aspekt historyczny	2
2.1	Model konwekcji atmosferycznej	2
3	Aspekt Fizyczny – Mechanizm Konwekcji Rayleigha-Bénarda	3
4	Wyprowadzenie układu Lorenza	4
5	Analiza stabilności	5
5.1	Układy autonomiczne	5
5.2	Linearyzacja układów autonomicznych	6
5.3	Wstępna analiza układu Lorenza	7
5.4	Punkty stacjonarne	8
5.5	Stabilność stanu stacjonarnego $\mathbf{0}$	8
5.6	Stabilność dwóch pozostałych stanów stacjonarnych	9
6	Zachowanie asymptotyczne	10
6.1	Atraktory	10
6.2	Funkcje Lapunowa	10
6.3	Globalna asymptotyczna stabilność dla $r < 1$	11
6.4	Atraktor dla $r > 1$	11
6.5	Rozwiązania nie dążące do atraktora Lorenza	13
7	Symulacje i wykresy	13
7.1	Klasyczne warunki początkowe	13
7.2	Zmiana parametrów	13
8	Synchronizacja dwóch układów	18
8.1	Motywacja dla synchronizacji układów chaotycznych	18
8.2	Zasada działania synchronizacji	18
8.3	Wyznaczanie wykładników Lapunowa metodą numeryczną	19
8.4	Analiza stabilności układu odpowiadającego	19
8.5	Analiza rozwiązań zsynchronizowanych układów Lorenza	19
8.6	Zastosowania zsynchronizowanych układów Lorenza	19

1 Wstęp

W 1963 Edward Lorenz stworzył nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych, jako uproszczony model konwekcji w atmosferze [1] (uproszczoną wersję wcześniejszego modelu Saltzmana [2]). Lorenz zauważył, że dla pewnych wartości parametrów rozwiązania tego układu zachowują się w sposób chaotyczny. Układ ten okazał się być jednym z najprostszych układów przejawiających chaos. Badania Lorenza przyczyniły się mocno do rozwoju początkującej wówczas jeszcze teorii chaosu i jego układ stał się jednym z najbardziej klasycznych przykładów układu chaotycznego. Poza meteorologią układ znalazł zastosowanie w modelowaniu obwodów elektrycznych [3], laserów [4], prądnic [5], reakcji chemicznych [6], w kryptografii ([7], patrz również 8.6), czy nawet w neurobiologii [8]. Niniejszy projekt ma na celu przedstawienie ogólnego wprowadzenia do układu Lorenza. Zostanie poruszona kwestia genezy jego konstrukcji, aspekt fizyczny oraz formalny opis matematyczny, a także analiza stabilności oraz pokazanie warunków istnienia i własności atraktora. Całość dopełni przeprowadzona symulacja oraz część poświęcona synchronizacji dwóch układów.

2 Aspekt historyczny

Edward Norton Lorenz żyjący w latach od 1917 do 2008, był amerykańskim matematykiem i meteorologiem oraz profesorem na MIT, czyli Massachusetts Institute of Technology – jednej z najbardziej prestiżowych i najlepszych szkół technicznych na świecie, zlokalizowanej w Cambridge, gdzie w roku 1948 uzyskał stopień doktora, a później piastował przez dekady stanowisko profesora i szefa Departamentu Meteorologii. Wcześniej, podczas II wojny światowej, służył jako synoptyk w siłach powietrznych USA co zmusiło go do porzucenia czystej teorii na rzecz praktycznego przewidywania pogody. Kojarzony jest przede wszystkim z badaniami na temat pogody, jednak jego praca podłożyła fundamenty pod dynamikę nieliniową i teorię chaosu, wpływając między innymi na biologię czy ekonomię.

2.1 Model konwekcji atmosferycznej

Zimą 1961 roku Lorenz pracował nad modelem konwekcji atmosferycznej (czyli ruchem powietrza wywołanym różnicami gęstości, w którym cieplejsze i lżejsze powietrze unosi się do góry, a chłodniejsze i gęstsze opada na dół), opartym na 12 równaniach. Model opisywał zachowanie płynu w zamkniętym pierścieniu, który był podgrzewany nierównomiernie co miało symulować uproszczoną cyrkulację atmosferyczną między równikiem a biegunem na obracającej się planecie. Kluczowymi zjawiskami, które były uwzględniane w modelu, były:

- Cyrkulacja południkowa, czyli ruch powietrza od ciepłego równika do zimnego bieguna;
- Efekt Coriolisa – wpływ obrotu planety na kierunek wiatru;
- Fale Rossbyego odpowiadające za zmiany pogody w skali kontynentalnej;
- Wymiana energii – jak ciepło jest transportowane przez wiatr i jak tarcie hamuje ten ruch.

Lorenz stosował technikę zwaną szeregami Fouriera i założył, że stan atmosfery można opisać jako sumę kilku nakładających się na siebie fal (oscylacji). Efektem było 12 połączonych nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Model ten do dzisiaj jest używany w celach dydaktycznych.

Lorenz pracował nad modelem na swoim komputerze Royal McBee LGP-30, który posiadał zaledwie 16 kilobajtów pamięci. Chciał przyrzeć się bliżej konkretnemu fragmentowi swojej symulacji, którą przeprowadził wcześniej, jednak dla zaoszczędzenia czasu, jako warunki początkowe nowej sesji, wpisał dane wyjściowe z poprzedniego wydruku. Moc obliczeniowa procesora pozwalała na dokładność do 6 miejsca po przecinku. Dla zmiennej odpowiadającej za intensywność prądów konwekcyjnych, Lorenz zamiast wartości 0.506127 postanowił wpisać uznaną za wystarczającą liczbę 0.506. W tamtych czasach panowało bowiem przekonanie że skoro błąd na wejściu jest nieistotny, to błąd na wyjściu również będzie pomijalny. Po powrocie z przerwy na kawę, Lorenz zastał wynik, którego się nie spodziewał, a mianowicie, początkowo obie linie pokrywały się, natomiast po krótkim czasie zaczęły się od siebie oddalać ostatecznie pokazując zupełnie różne stany pogodowe. Początkowo matematyk podejrzewał awarie komputera jednak po serii testów doznał olśnienia, że system był nieliniowy, co oznaczało, że w pewnych układach najmniejsze zaburzenie ulega wykładniczemu wzmocnieniu. Po tym odkryciu, chcąc zrozumieć istotę chaosu, zaczął model 12 równań stopniowo upraszczać tak aby system w dalszym ciągu zachowywał się nieprzewidywalnie. Ostatecznym wnioskiem okazał się fakt że wystarczą tylko trzy zmienne: x , y , z , aby stworzyć układ, którego nie a się przewidzieć. W 1963 roku Edward Lorenz opublikował swoją pracę

„Deterministic Nonperiodic Flow” [1], w której opisał słynny model z 3 równaniami, który zamiast dążyć do stabilnego punktu lub cyklu, krążył wokół dziwnego kształtu przypominającego motyla. Kształt wykresu tego układu przyczynił się również do powstania znanego dzisiaj sformułowania, które padło na wykładzie Lorenza w 1972 roku, a mianowicie: „Czy trzepot skrzydeł motyla w Brazylii może wywołać tornado w Teksasie?”.

3 Aspekt Fizyczny – Mechanizm Konwekcji Rayleigha-Bénarda

Zanim przejdziemy do formalnego zapisu matematycznego, musimy precyzyjnie zdefiniować laboratorium fizyczne, w którym narodził się układ Lorenza. Zjawiskiem bazowym jest tu tzw. konwekcja Rayleigha-Bénarda, czyli zachowanie niestabilnej termicznie warstwy płynu (cieczy lub gazu) poddanej działaniu zewnętrznego pola grawitacyjnego.

Wyobraźmy sobie nieskończoną, poziomą warstwę płynu o stałej grubości (wysokości) oznaczanej jako H . Warstwa ta znajduje się pomiędzy dwiema sztywnymi płytami: Dolna płyta ($z = 0$) jest stale podgrzewana i utrzymuje wysoką temperaturę $T_0 + \Delta T$. Górna płyta ($z = H$) jest stale chłodzona i utrzymuje niższą temperaturę T_0 . W układzie tym działa jednorodne pole grawitacyjne skierowane pionowo w dół, reprezentowane przez przyspieszenie ziemskie g .

Gdy różnica temperatur ΔT jest bliska zeru, w układzie panuje idealna równowaga dynamiczna. Ciepło z dolnej płyty jest transportowane ku górze wyłącznie na drodze przewodnictwa termicznego (dyfuzji). Molekuły płynu drgają, przekazując sobie energię kinetyczną, ale makroskopowo płyn pozostaje w absolutnym bezruchu. Profil temperatury w pionie jest wtedy idealnie liniowy. Sytuacja zmienia się dramatycznie, gdy zaczynamy zwiększać ΔT . Ciepłszy płyn przy dolnej płycie rozszerza się termicznie. Zgodnie z prawami termodynamiki, jego gęstość maleje. Nad nim znajduje się płyn chłodniejszy, a więc gęstszy i cięższy. Pojawia się siła wyporu (siła Archimedes), która próbuje wypchnąć ciepły płyn ku górze, a zimny ściągnąć na dół. Tej rewolucji strukturalnej sprzeciwiają się jednak dwie siły tłumiące:

- **Lepkość płynu** (ν): Wewnętrzne tarcie cząsteczkowe, które działa jak hamulec dla jakichkolwiek ruchów makroskopowych.
- **Dyfuzyjność termiczna** (κ): Zdolność płynu do szybkiego wyrównywania temperatur. Jeśli ciepły element płynu unosi się zbyt wolno, odda swoje ciepło otoczeniu, zanim dotrze na górę, tracąc tym samym siłę wyporu.

Aby opisać ten konflikt sił bez odwoływania się do konkretnych substancji (czy badamy wodę, olej, czy powietrze), fizyka płynów posługuje się dwiema kluczowymi liczbami, które Lorenz zaimplementował do swojego modelu:

Liczba Prandtla (σ lub Pr):

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3.1)$$

Definiuje ona stosunek lepkości kinematycznej (dyfuzji pędu) do dyfuzyjności termicznej. Mówi nam, co w danym płynie rozchodzi się szybciej: impuls ruchu czy temperatura. Dla powietrza $\sigma \approx 0.7$, dla wody ≈ 7 , a dla lepkich olejów może wynosić tysiące.

Liczba Rayleigha (Ra):

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T H^3}{\nu \kappa} \quad (3.2)$$

(gdzie α to współczynnik rozszerzalności termicznej). Jest to najważniejszy parametr kontrolny. Reprezentuje on stosunek sił wyporu (dążących do wywołania destabilizacji) do sił tłumiących (lepkości i dyfuzji). Gdy liczba Rayleigha przekroczy wartość krytyczną (Ra_c), przewodnictwo cieplne przestaje wystarczać. Układ gwałtownie łamie symetrię i organizuje się w regularne, wirujące struktury geometryczne – rolki konwekcyjne (komórki Bénarda). Płyn unosi się w jednym pasie, schładza pod górną płytą, po czym opada w pasie sąsiednim, tworząc zamknięte pętle cyrkulacyjne.

4 Wyprowadzenie układu Lorenza

Redukcja ciągłych równań fizycznych do układu trzech zmiennych Lorenza wymaga zastosowania aparatu hydrodynamiki.

Punktem wyjścia są fundamentalne równania mechaniki płynów: równanie Naviera-Stokesa (zachowanie pędu), równanie ciągłości (zachowanie masy) oraz równanie transportu ciepła. Stosując tzw. przybliżenie Boussinesqa (zakładające, że zmiany gęstości płynu są pomijalne wszędzie poza członem generującym siłę wyporu w polu grawitacyjnym), równania dla dwuwymiarowego przepływu przybierają postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 T \quad (4.1b)$$

Operatory różniczkowe:

- $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}$ – pochodne cząstkowe po czasie t oraz współrzędnych przestrzennych: poziomej x i pionowej z .
- ∇^2 – **operator Laplace’a (laplasjan)**. W dwóch wymiarach to suma drugich pochodnych cząstkowych:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

Mierzy lokalną niejednorodność pola.

- ∇^4 – **bilaplasjan**, czyli dwukrotny laplasjan $\nabla^2(\nabla^2)$. Rozpisany na pochodne cząstkowe wygląda następująco:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \quad (4.3)$$

Odpowiada on za silne rozpraszanie (wygładzanie) małych wirów przez lepkość.

- $\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, z)}$ – **jakobian** dwóch funkcji. To wyznacznik macierzy pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, z)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (4.4)$$

W fizyce płynów ten nieliniowy człon opisuje **adwekcję**, czyli sytuację, w której poruszający się płyn sam ze sobą przenosi pęd lub ciepło.

Pola fizyczne (funkcje zmiennych x, z, t):

- $\psi(x, z, t)$ – **funkcja prądu**. Pozwala opisać dwuwymiarową prędkość płynu za pomocą jednej funkcji. Jej pochodne definiują składowe prędkości: poziomą $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ oraz pionową $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.
- $T(x, z, t)$ – pole temperatury w płynie.

Stałe i parametry fizyczne:

- ν – współczynnik lepkości kinematycznej (odpowiada za „tarcie” wewnętrzne płynu).
- κ – współczynnik dyfuzyjności termicznej (zdolność do przewodzenia ciepła).
- g – przyspieszenie ziemskie.
- α – współczynnik rozszerzalności termicznej (określa, jak bardzo płyn rzednie, gdy go podgrzewamy).

Lorenz, idąc śladem Saltzman [2], postanowił zbadać stan układu tuż po przekroczeniu progu stabilności. Zamiast rozwiązywać te potężne równania cząstkowe dla każdego punktu przestrzeni, zastosował metodę Galerkin. Polega ona na przedstawieniu nieznanych pól fizycznych (ψ oraz profilu temperatury) w postaci szeregu nieskończonych funkcji trygonometrycznych (szeregu Fouriera), a następnie radykalnym odcięciu większości wyrazów. Dla pierwszej, najsilniejszej modyfikacji przestrzennej układu, Lorenz przyjął następujący zestaw trzech modów falowych:

Dla funkcji prądu (ruch płynu):

$$\psi(x, z, t) = \sqrt{2} \kappa (a + a^{-1}) X(t) \sin\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (4.5)$$

- $X(t)$ – **amplituda prądu konwekcyjnego**. Określa szybkość i kierunek obrotu komórki konwekcyjnej.
- H – wysokość warstwy płynu (stała).
- a – parametr geometrii komórki (stosunek jej szerokości do wysokości).

Dla zaburzeń temperatury:

Z powodu ruchu płynu, pole temperatury T zostaje rozbite na dwa elementy: składową odpowiedzialną za poziomą różnicę temperatur między prądem wznoszącym a opadającym (zmienna Y) oraz składową opisującą nieliniowe zniekształcenie pionowego profilu temperatury (zmienna Z).

$$\delta T(x, z, t) = \frac{\Delta T}{\pi r} \left(\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \right) \quad (4.6)$$

- $\delta T(x, z, t)$ – zaburzenie temperatury.
- $Y(t)$ – zmienna proporcjonalna do **poziomej różnicy temperatur** między prądem wznoszącym a opadającym.
- $Z(t)$ – zmienna opisująca **nieliniowe zniekształcenie pionowego profilu temperatury**.
- ΔT – stała różnica temperatur między dolną a górną granicą płynu.
- $r = Ra/Ra_c$ – **zredukowana liczba Rayleigha**. Jeśli $r > 1$, układ przekracza próg stabilności i płyn zaczyna krążyć, tworząc tzw. komórki Rayleigha-Bénarda.

Podstawiając powyższe przybliżenia do wyjściowych równań różniczkowych cząstkowych Boussinesq'a i wykorzystując własność ortogonalności funkcji sinus i cosinus (całkowanie po całej objętości komórki konwekcyjnej powoduje wyzerowanie się wyższych harmonicznych), Lorenz wyeliminował całkowicie zależności od współrzędnych przestrzennych x oraz z . W wyniku tego uśrednienia przestrzennego, skomplikowane i ciągłe pole hydrodynamiczne zostało zredukowane do trajektorii pojedynczego punktu (x, y, z) w abstrakcyjnej, trójwymiarowej przestrzeni fazowej. Po ostatecznym wprowadzeniu bezwymiarowej skali czasowej $\tau = \pi^2 H^{-2} (1 + a^2) \kappa t$ oraz zdefiniowaniu geometrycznego parametru tłumienia jako $b = 4(1 + a^2)^{-1}$, nieliniowe sprzężenia między transportem pędu a temperaturą zaowocowały zamkniętym, zwartym układem trzech deterministycznych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Ostateczny układ Lorenza prezentuje się więc następująco:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \sigma(y - x) & (4.7a) \\ \frac{dy}{d\tau} = x(r - z) - y & (4.7b) \\ \frac{dz}{d\tau} = xy - bz. & (4.7c) \end{cases}$$

5 Analiza stabilności

Przeprowadzimy teraz formalną analizę stabilności punktów stacjonarnych układu. Na początek przypomnijmy kilka definicji związanych z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi:

5.1 Układy autonomiczne

Rozważamy autonomiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, czyli układ n równań postaci

$$u_i'(t) = f_i(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)), \quad (5.1)$$

dla pewnych funkcji ciągłych $f_i : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C} \mathbb{R}$, i niewiadomych $u_i \in C^1(\mathbb{R})$, gdzie $i \in [n]$. Zazwyczaj będzie nas interesowało zachowanie rozwiązań takiego układu dla $t \in [t_0; \infty)$, gdzie t_0 jest jakimś rzeczywistym czasem początkowym, dla którego zadany jest stan początkowy układu $u_i(t_0) = u_{0i} \in \mathbb{R}$. Warto wspomnieć, że

wprowadzając nowe zmienne, można każdy układ równań różniczkowych zwyczajnych sprowadzić do układu autonomicznego pierwszego rzędu. Układ (5.1) można przedstawić prościej w postaci wektorowej

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (5.2)$$

gdzie $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ oraz $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{u}))^T$. Sprowadziliśmy więc układ n równań do jednego równania, w którym funkcje mają postać wektorową: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ oraz $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Notacja ta jest zazwyczaj wygodniejsza, więc większość definicji będziemy opierać na niej.

W analizie takich układów bardzo przydatne jest pojęcie **przestrzeni fazowej**. Jest to po prostu przeciwdziedzina funkcji \mathbf{u} , czyli przestrzeń \mathbb{R}^n , w której każdy punkt przedstawia pewien stan, w którym może się znaleźć układ. Dla warunków początkowych $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ **trajektorią** rozwiązania, będziemy nazywać krzywą w przestrzeni fazowej, po której będzie się ono poruszać, czyli formalnie obraz $\text{im } \mathbf{u}$. Oczywiście krzywe te są klasy C^1 . Okazuje się, że przy dość łagodnych założeniach, trajektorie są jednoznaczne. Mówi o tym podstawowe twierdzenie z wykładu z równań różniczkowych, sformułowane tutaj w prostszej formie dla układów autonomicznych.

Twierdzenie 5.1 (Picard-Lindelöf dla układu autonomicznego) Niech $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Wówczas jeśli funkcja \mathbf{f} spełnia warunek Lipschitza na pewnym otoczeniu punktu \mathbf{u}_0 , to dla warunków początkowych $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ układ (5.2) ma jednoznaczne rozwiązanie na przedziale $[t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$ dla pewnego $\varepsilon > 0$.

Zatem wszędzie, gdzie funkcja \mathbf{f} jest lokalnie Lipschitzowska, trajektorie nie mogą się przecinać. Mogą jednak dążyć do tej samej granicy, gdy $t \rightarrow \infty$. Przy badaniu równań różniczkowych bardzo istotne jest, jak zachowują się początkowo bliskie sobie trajektorie:

Definicja 5.2 (Stabilność rozwiązania) Niech \mathbf{u} będzie rozwiązaniem układu (5.2) przy warunkach początkowych $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$. Rozwiązanie to nazywamy

- stabilnym w sensie Lapunowa, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że dla dowolnego rozwiązania $\tilde{\mathbf{u}}$ spełniającego $|\tilde{\mathbf{u}}(t_0) - \mathbf{u}(t_0)| < \delta$ zachodzi $|\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)| < \varepsilon$ dla wszystkich $t > t_0$ (dla bliskich warunków początkowych rozwiązania pozostają blisko);
- asymptotycznie stabilnym, jeśli jest stabilne w sensie Lapunowa oraz dodatkowo istnieje $\delta > 0$, taka że dla dowolnego rozwiązania $\tilde{\mathbf{u}}$ spełniającego $|\tilde{\mathbf{u}}(t_0) - \mathbf{u}(t_0)| < \delta$ zachodzi $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t)| = 0$ (dla bliskich warunków początkowych rozwiązania zbiegają do siebie).

Zdefiniujemy teraz pewne szczególne punkty:

Definicja 5.3 Punkt $\mathbf{u}_* \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **stanem (punktem) stacjonarnym** układu (5.2), jeśli jest miejscem zerowym funkcji \mathbf{f} . Wówczas dla warunków początkowych $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_*$ mamy $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{0}$, czyli funkcja stale równa \mathbf{u}_* jest rozwiązaniem układu. Trajektorią tego rozwiązania jest punkt $\mathbf{u}_* \in \mathbb{R}^n$.

Stabilność punktów stacjonarnych można względnie prosto ustalić, stosując zabieg zwany linearyzacją.

5.2 Linearyzacja układów autonomicznych

Najprostszym rodzajem układów autonomicznych jest układ liniowy:

Definicja 5.4 Układ liniowy to układ postaci

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (5.3)$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą o współczynnikach rzeczywistych.

Taki układ można rozwiązać w sposób jawny. Jego rozwiązanie dla $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ to $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \exp(\mathbf{A}t)$. Stabilność takiego układu jest więc prosto zbadać:

Twierdzenie 5.5 Jeśli macierz \mathbf{A} nie ma zerowych wartości własnych, to jedynym stanem stacjonarnym jest punkt $\mathbf{0}$. Stan ten jest

- niestabilny, gdy macierz \mathbf{A} ma co najmniej jedną wartość własną o dodatniej części rzeczywistej;

- asymptotycznie stabilny, gdy wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{A} mają ujemną część rzeczywistą.

Okazuje się, że analiza stabilności układów liniowych, może nam pomóc w analizie stabilności bardziej skomplikowanych układów. Wracamy więc do ogólnego układu autonomicznego (5.2). Od teraz będziemy zakładać, że funkcja \mathbf{f} jest klasy $C^1(\mathbb{R}^n)$, czyli wszystkie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją i są ciągłe. Funkcja klasy $C^1(\mathbb{R}^n)$ jest lokalnie Lipschitzowska, więc spełnia warunki twierdzenia Picarda-Lindelöfa na całym \mathbb{R}^n . Rozważmy teraz rozwiązanie \mathbf{u} układu (5.2) przy warunkach początkowych $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ oraz rozwiązanie $\mathbf{u} + \mathbf{h}$ przy małym zaburzeniu $\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}_0$. Wówczas, póki $\mathbf{h}(t)$ jest małe, mamy

$$(\mathbf{u} + \mathbf{h})' = \mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}) + D\mathbf{f}(\mathbf{u})\mathbf{h}, \quad (5.4)$$

gdzie

$$D\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}) \right)_{i,j \in [n]} \quad (5.5)$$

jest macierzą pochodnych (jakobianem) funkcji \mathbf{f} . Dla dowolnego rozwiązania \mathbf{u} wzór ten nie jest zbyt przydatny, gdyż wielkości $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ oraz $D\mathbf{f}(\mathbf{u})$ zmieniają się w czasie. biorąc jednak rozwiązanie stacjonarne $\mathbf{u}_*(t) = \mathbf{u}_*$ otrzymujemy

$$(\mathbf{u}_* + \mathbf{h})' \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}_*) + D\mathbf{f}(\mathbf{u}_*)\mathbf{h} = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_*)\mathbf{h}. \quad (5.6)$$

Wokół punktu stacjonarnego, rozwiązania modelują się więc lokalnie za pomocą układu liniowego. Jest to sformalizowane w poniższym twierdzeniu podawanym na wykładzie z równań różniczkowych:

Twierdzenie 5.6 (Hartman-Grobman) Załóżmy, że układ (5.2) ma hiperboliczny stan stacjonarny, to znaczy stan stacjonarny \mathbf{u}_* , taki że jakobian $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_*)$ nie ma zerowej wartości własnej. Wówczas układ ten jest topologicznie sprzężony do układu $\mathbf{u}' = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_*)\mathbf{u}$ na pewnym otoczeniu punktu \mathbf{u}_* .

Topologiczna sprzężoność oznacza tu luźno, że trajektorie zachowują się podobnie (z dokładnością do homeomorfizmu) w otoczeniu obu punktów stacjonarnych. Takie przybliżenie układu autonomicznego przez układ liniowy nazywamy **linearyzacją** układu. Wszystkie te rozważania prowadzą do ostatecznego wniosku, sformułowanego tutaj jako twierdzenie:

Twierdzenie 5.7 Jeśli układ (5.2) ma hiperboliczny stan stacjonarny \mathbf{u}_* , to jest on

- niestabilny, gdy jakobian $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_*)$ ma co najmniej jedną wartość własną o dodatniej części rzeczywistej;
- asymptotycznie stabilny, gdy wszystkie wartości własne macierzy $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_*)$ mają ujemną część rzeczywistą.

5.3 Wstępna analiza układu Lorenza

Przypomnijmy układ Lorenza

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), & (5.7a) \\ y' = x(r - z) - y, & (5.7b) \\ z' = xy - bz. & (5.7c) \end{cases}$$

Odnosnie stałych r, σ, b zakładamy jedynie, że są one dodatnie. Układ możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(r - z) - y \\ xy - bz \end{pmatrix} =: \mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Będziemy oznaczali $\mathbf{u}(t) =: (x(t), y(t), z(t))^\top$. Oczywiście $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, więc spełnia również lokalny warunek Lipschitza. Zatem z twierdzenia Picarda-Lindelöfa układ (5.7) ma jednoznaczne rozwiązania dla dowolnych warunków początkowych.

Jakobian funkcji \mathbf{f} w punkcie $\mathbf{u} = (x, y, z)^\top$ równy jest

$$D\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

5.4 Punkty stacjonarne

Szukamy punktów $(x_*, y_*, z_*)^\top$, takich że

$$\begin{cases} x_*' = \sigma(y_* - x_*) = 0, & (5.10a) \\ y_*' = x_*(r - z_*) - y_* = 0, & (5.10b) \\ z_*' = x_*y_* - bz_* = 0, & (5.10c) \end{cases}$$

Z równania (5.10a) mamy $y_* = x_*$. Wówczas z (5.10c) mamy $z_* = b^{-1}x_*^2$. Podstawiając do (5.10b) otrzymujemy

$$x_*(r - 1 - b^{-1}x_*^2) = 0. \quad (5.11)$$

W zależności od r są więc dwie możliwości:

- Jeśli $r < 1$, to jedynym punktem stacjonarnym jest $\mathbf{0}$.
- Jeśli $r > 1$, to mamy trzy punkty stacjonarne:

$$\mathbf{u}_{*0} = \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{u}_{*\pm} = \begin{pmatrix} x_{*\pm} \\ y_{*\pm} \\ z_{*\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Dla $r = 1$ zachodzą w pewnym sensie oba przypadki jednocześnie. Analiza stabilności dla tego przypadku jest jednak znacznie trudniejsza, gdyż jedyny (potrójny) stan stacjonarny $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$ nie jest hiperboliczny: ma wartość własną równą 0.

Z punktu widzenia modelu punkty stacjonarne $\mathbf{u}_{*\pm}$ odpowiadają stałej konwekcji, a punkt $\mathbf{0}$ odpowiada braku konwekcji.

5.5 Stabilność stanu stacjonarnego $\mathbf{0}$

Przeanalizujemy stabilność stanu stacjonarnego $\mathbf{u}_{*0} = \mathbf{0}$. Szukamy wartości własnych macierzy

$$D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Wielomian charakterystyczny to

$$\chi(\lambda) = \det(D\mathbf{f}(\mathbf{0}) - \lambda) = -(b + \lambda)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)). \quad (5.14)$$

Od razu mamy więc pierwszą wartość własną $\lambda_b = -b < 0$. Kolejne dwie wartości własne to pierwiastki równania kwadratowego

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) = 0 \quad (5.15)$$

Wyróżnik kwadratowy to

$$\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0. \quad (5.16)$$

Równanie (5.15) ma więc dwa rzeczywiste pierwiastki (wartości własne):

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{\Delta}). \quad (5.17)$$

Oczywiście $\lambda_- < 0$. Z kolei $\lambda_+ < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sqrt{\Delta} < \sigma + 1, \quad (5.18a)$$

$$\sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} < \sigma + 1, \quad (5.18b)$$

$$4\sigma(1 - r) > 0, \quad (5.18c)$$

$$r < 1, \quad (5.18d)$$

Zatem dla $r < 1$ jedyny stan stacjonarny $\mathbf{0}$ jest asymptotycznie stabilny. Z kolei gdy $r > 1$ staje się on niestabilny. Punkt $r = 1$ jest tzw. granicą stabilności. Jest to zgodne z interpretacją fizyczną stałej r .

5.6 Stabilność dwóch pozostałych stanów stacjonarnych

Analizujemy stany stacjonarne

$$\mathbf{u}_{*\pm} = \begin{pmatrix} x_{*\pm} \\ y_{*\pm} \\ z_{*\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Jakobian w tych punktach jest postaci

$$D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{*\pm}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Wielomian charakterystyczny to

$$\chi(\lambda) = \det(D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{*\pm}) - \lambda) = \begin{vmatrix} -(\sigma + \lambda) & \sigma & 0 \\ 1 & -(1 + \lambda) & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -(b + \lambda) \end{vmatrix} \quad (5.21a)$$

$$= -(\sigma + \lambda) \begin{vmatrix} -(1 + \lambda) & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & -(b + \lambda) \end{vmatrix} - \sigma \begin{vmatrix} 1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & -(b + \lambda) \end{vmatrix} \quad (5.21b)$$

$$= -(\sigma + \lambda) (\lambda^2 + (b + 1)\lambda + b + b(r - 1)) - \sigma (-b - \lambda + b(r - 1)) \quad (5.21c)$$

$$= -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - b(\sigma + r)\lambda - 2\sigma b(r - 1). \quad (5.21d)$$

Musimy zbadać znak części rzeczywistej pierwiastków tego wielomianu, czy równoważnie wielomianu

$$p(\lambda) := -\chi(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1), \quad (5.22)$$

w zależności od parametrów. Wielomian sześcienny o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Mamy

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p(\lambda) = -\infty \quad \text{oraz} \quad p(0) = 2\sigma b(r - 1) > 0, \quad (5.23)$$

więc z twierdzenia Darboux co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty jest ujemny. Pozostałe dwa pierwiastki mogą być rzeczywiste lub zespolone i sprzężone do siebie. Trudno jest wyznaczyć ich znak bezpośrednio, skorzystamy więc z kryterium stabilności Routha-Hurwitza [9]. Mówi ono, że wielomian sześcienny postaci

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (5.24)$$

jest stabilny (część rzeczywista wszystkich pierwiastków jest ujemna) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współczynniki a_n są dodatnie oraz

$$a_1 a_2 > a_0. \quad (5.25)$$

W naszym przypadku wszystkie współczynniki są zawsze dodatnie (punkty stacjonarne $\mathbf{u}_{*\pm}$ istnieją tylko, gdy $r > 1$), wystarczy więc sprawdzić ostatni warunek:

$$b(\sigma + r)(\sigma + b + 1) > 2\sigma b(r - 1) \quad (5.26a)$$

$$\sigma(\sigma + b + 1) + r(\sigma + b + 1) > 2\sigma r - 2\sigma \quad (5.26b)$$

$$r(b + 1 - \sigma) > -\sigma(\sigma + b + 3) \quad (5.26c)$$

$$r(\sigma - b - 1) < \sigma(\sigma + b + 3) \quad (5.26d)$$

$$\boxed{r < \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} =: R(\sigma, b)} \quad (5.26e)$$

Jest to kryterium stabilności stanów stacjonarnych $\mathbf{u}_{*\pm}$. Gdy zachodzi ta nierówność są one asymptotycznie stabilne. Przy nierówności w drugą stronę, są one niestabilne, a gdy zachodzi równość, dwie wartości własne są czysto urojone. Jest to ponownie granica stabilności. Dla standardowych wartości $\sigma = 10$, $b = 8/3$ granica ta jest równa $R(10, 8/3) = 470/19 \approx 24.74$.

6 Zachowanie asymptotyczne

W poprzedniej sekcji zbadaliśmy, jak układ zachowuje się w pobliżu punktów stacjonarnych. Teraz będziemy badać globalne zachowanie układu, gdy $t \rightarrow \infty$. W tym celu zdefiniujemy na początek pojęcie atraktora.

6.1 Atraktory

Asymptotyczna stabilność punktu stacjonarnego oznacza, że wszystkie punkty w pewnym jego otoczeniu będą do niego dążyć. Można powiedzieć, że punkt ten przyciąga (ang. *Attract*) sąsiednie trajektorie. Pojęcie przyciągania nie ogranicza się jednak tylko do punktów. W przypadku dwuwymiarowym, oprócz do punktów stacjonarnych, rozwiązania mogą również dążyć do tzw. **cyklu granicznego**. Dla wyższych wymiarów przyciągać mogą już bardzo różnorodne zbiory. Ogólnie mówi się więc o zbiorach przyciągających, nazywanych zazwyczaj **Atraktora**mi.

Definicja 6.1 Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ przestrzeni fazowej będziemy nazywali **Atraktorem**, gdy spełnia poniższe trzy warunki:

1. A jest niezmienniczy w przód względem czasu, czyli dla dowolnej trajektorii u , jeśli $u(t_0) \in A$, to $u(t) \in A$ dla każdego $t > t_0$ (trajektorie znajdujące się w A już nigdy go nie opuszczają).
2. Istnieje pewne otoczenie A nazywane **basenem przyciągania** i oznaczane $B(A)$ punktów, które wchodzi do A w skończonym czasie lub zbliżają się do A na dowolnie małą odległość, gdy $t \rightarrow \infty$. Bardziej formalnie, dla każdego rozwiązania $u(t_0) = u_0 \in B(A)$, zachodzi, że dla każdego otoczenia U zbioru A istnieje czas $T \geq t_0$, taki że $u(t) \in U$ dla $t > T$.
3. Zbiór A jest minimalnym zbiorem o powyższych dwóch własnościach, czyli nie istnieje właściwy (niepusty) podzbiór A spełniający te własności.

Atraktor A będziemy nazywać **globalnym**, jeśli przyciąga wszystkie trajektorie, czyli $B(A) = \mathbb{R}^n$, a **prawie globalnym**, gdy przyciąga prawie wszystkie trajektorie, czyli zbiór $\mathbb{R}^n \setminus B(A)$ jest miary zero.

Szczególnie ciekawe właściwości mają tzw. *dziwne atraktory*.

Definicja 6.2 Atraktor nazywamy **dziwnym**, jeśli ma strukturę fraktalu, czyli jego wymiar Hausdorffa nie jest liczbą całkowitą.

Dziwne atraktory bardzo ściśle wiążą się z pojęciem chaosu. Co prawda istnieją niechaotyczne dziwne atraktory, to dla przeważającej ich większości rozwiązania wewnątrz nich zachowują się chaotycznie. Oznacza to, że przejawiają tzw. **efekt motyla** o którym była już mowa, czyli są wrażliwe na warunki początkowe: Mała różnica w warunkach początkowych skutkuje późniejszą rozbieżnością rozwiązań.

6.2 Funkcje Lapunowa

Do analizy zachowania asymptotycznego będziemy korzystać z tzw. **funkcji Lapunowa**. Jest to w pewnym sensie uogólnienie pojęcia energii układu fizycznego: Jeśli energia układu fizycznego (np. wahadła) maleje z czasem, to ostatecznie układ ustabilizuje się w stanie spoczynku. Metoda Lapunowa polega na znalezieniu pewnej wielkości zależnej od stanu, która maleje z czasem dla wszystkich niezerowych rozwiązań. Dla różnych rodzajów stabilności wymagane są różne własności tej funkcji. Przytoczymy tutaj twierdzenie dla globalnej stabilności asymptotycznej.

Twierdzenie 6.3 (Lapunow dla globalnej stabilności asymptotycznej) Niech $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ będzie układem o jedynym stanie stacjonarnym w punkcie $\mathbf{0}$. Niech $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 o poniższych własnościach:

1. V jest dodatnio określona, czyli $V(\mathbf{0}) = 0$ oraz $V(\mathbf{u}) > 0$ dla $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
2. V jest nieograniczona względem normy, czyli $V(\mathbf{u}) \rightarrow \infty$, gdy $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$
3. Dla dowolnego niezerowego rozwiązania \mathbf{u} układu pochodna V względem czasu

$$V'(\mathbf{u}) := \frac{d}{dt}V(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial u_i} u'_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial u_i} f_i(\mathbf{u}) = \nabla V \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

jest ściśle mniejsza od zera.

Wówczas punkt stacjonarny $\mathbf{0}$ jest globalnie asymptotycznie stabilny, czyli jest globalnym atraktorem. [10]

Należy dodać, że to twierdzenie stosuje się do dowolnych punktów stacjonarnych, nie tylko $\mathbf{0}$: Jeżeli \mathbf{u}_* jest punktem stacjonarnym układu $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, to stosując podstawienie $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_*$, otrzymujemy układ $\mathbf{v}' = \mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{u}_*)$, którego stanem stacjonarnym jest punkt $\mathbf{0}$.

Twierdzenie 6.3 jest czasem nazywane **regułą Barbaszina-Krasowskiego-LaSalle'a**.

6.3 Globalna asymptotyczna stabilność dla $r < 1$

Rozważmy zachowanie asymptotyczne układu przy $r < 1$. Wykorzystamy w tym celu funkcję Lapunowa. Niech $\mathbf{u} = (x, y, z)^\top$ będzie rozwiązaniem układu Lorenza. Wówczas niech

$$V(\mathbf{u}) = V(x, y, z)^\top = \frac{1}{2\sigma} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2. \quad (6.1)$$

Wówczas mamy $V(\mathbf{u}) > 0$ dla $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ oraz $V(\mathbf{0}) = 0$. Ponadto V jest nieograniczona względem normy. Niech V' oznacza pochodną V względem czasu, czyli

$$V'(x, y, z)^\top = \frac{d}{dt} V(x, y, z)^\top = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial z} z' \quad (6.2a)$$

$$= x \frac{x'}{\sigma} + y y' + z z' \quad (6.2b)$$

$$= x(y - x) + y(xr - xz - y) + z(xy - bz) \quad (6.2c)$$

$$= xy - x^2 + rxy - xyz - y^2 + xyz - bz^2 \quad (6.2d)$$

$$= -x^2 + (r+1)xy - \frac{(r+1)^2}{4} y^2 - \left(1 - \frac{(r+1)^2}{4}\right) y^2 - bz^2 \quad (6.2e)$$

$$= -\left(x - \frac{r+1}{2} y\right)^2 - \left(1 - \frac{(r+1)^2}{4}\right) y^2 - bz^2. \quad (6.2f)$$

Zatem dla $r < 1$ mamy $V'(\mathbf{u}) < 0$ dla $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ oraz $V'(\mathbf{0}) = 0$. Funkcja V jest więc funkcją Lapunowa spełniającą warunki twierdzenia 6.3, co oznacza, że dla $r < 1$ wszystkie rozwiązania będą zbiegać do punktu $\mathbf{0}$, czyli jest on globalnym atraktorem. Zgadza się to z interpretacją fizyczną r : Dla $r < 1$ układ ostatecznie ustabilizuje się w stanie braku konwekcji, z kolei, gdy $r > 1$, to (prawie) zawsze będzie zachodzić konwekcja.

6.4 Atraktor dla $r > 1$

Od teraz będziemy rozważać przypadek $r > 1$. Na początek pokażemy, że wszystkie rozwiązania ostatecznie znajdują się w pewnym ograniczonym podzbiórze przestrzeni fazowej. Za Lorenzem [1] użyjemy do tego funkcji podobnej do funkcji Lapunowa. Niech $\mathbf{u} = (x, y, z)^\top$ będzie rozwiązaniem układu Lorenza. Wówczas niech

$$W(\mathbf{u}) = W(x, y, z)^\top = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} (z - (\sigma + r))^2. \quad (6.3)$$

Poziomice W to koncentryczne sfery o środku w punkcie $\mathbf{w} := (0, 0, \sigma + 1)^\top$. Funkcja jest więc nieograniczona względem normy i zachodzi $W(\mathbf{u}) > 0$ dla $\mathbf{u} \neq \mathbf{w}$ oraz $W(\mathbf{w}) = 0$. Pochodna względem czasu W' jest równa

$$W'(x, y, z)^\top = \frac{d}{dt} W(x, y, z)^\top = \frac{\partial W}{\partial x} x' + \frac{\partial W}{\partial y} y' + \frac{\partial W}{\partial z} z' \quad (6.4a)$$

$$= xx' + yy' + (z - (\sigma + r)) z' \quad (6.4b)$$

$$= x\sigma(y - x) + y(xr - xz - y) + (z - (\sigma + r))(xy - bz) \quad (6.4c)$$

$$= \sigma xy - \sigma x^2 + rxy - xyz - y^2 + xyz - bz^2 - (\sigma + r)xy + (\sigma + r)bz \quad (6.4d)$$

$$= -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 + (\sigma + r)bz \quad (6.4e)$$

Pokażemy, że $W' \leq -\alpha W + M$ dla pewnych dodatnich stałych $\alpha, M > 0$. Rozważmy wyrażenie $W' + \alpha W$:

$$W' + \alpha W = -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 + (\sigma + r)bz + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\alpha}{2}(z - (\sigma + r))^2 \quad (6.5a)$$

$$= -\left(\sigma - \frac{\alpha}{2}\right)x^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)y^2 - \left(b - \frac{\alpha}{2}\right)z^2 + (b - \alpha)(\sigma + r)z + \frac{\alpha}{2}(\sigma + r)^2. \quad (6.5b)$$

Ustalmy $\alpha > 0$, takie że $\alpha < \min(2\sigma, 2, 2b)$. Wówczas współczynniki przy x^2, y^2 i z^2 są ujemne, więc wykres funkcji $\tilde{W}(x, y, z)^\top := W'(x, y, z)^\top + \alpha W(x, y, z)^\top$ jest trójwymiarową paraboloidą zwróconą w dół. Funkcja ta osiąga więc pewną wartość maksymalną $M < \infty$. Jako że $\tilde{W}(0, 0, 0) = \frac{\alpha}{2}(\sigma + r)^2 > 0$, to mamy $0 < M < \infty$.

Udowodniliśmy więc, że $W' \leq -\alpha W + M$ dla pewnych stałych $\alpha, M > 0$. Oznacza to, że dopóki $W(\mathbf{u}) > M/\alpha$, wartość $W(\mathbf{u})$ będzie maleć. Rozwiążemy tę nierówność bardziej formalnie, traktując W jako funkcję zmiennej czasu i ustalając czas początkowy $t_0 = 0$. Mnożąc obustronnie przez czynnik całkujący $e^{\alpha t} > 0$, otrzymujemy

$$W'(t)e^{\alpha t} + \alpha W(t)e^{\alpha t} \leq M e^{\alpha t}. \quad (6.6)$$

Lewa strona nierówności to pochodna iloczynu $W(t)e^{\alpha t}$, więc mamy

$$\frac{d}{dt}(W(t)e^{\alpha t}) \leq M e^{\alpha t}. \quad (6.7)$$

Jako że nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $t \geq 0$, to możemy scałkować obustronnie:

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(W(s)e^{\alpha s}) ds \leq \int_0^t M e^{\alpha s} ds \quad (6.8a)$$

$$W(t)e^{\alpha t} - W(0) \leq \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \quad (6.8b)$$

$$W(t)e^{\alpha t} \leq W(0) + \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \quad (6.8c)$$

$$W(t) \leq W(0)e^{-\alpha t} + \frac{M}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \quad (6.8d)$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \leq \frac{M}{\alpha}. \quad (6.9)$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego rozwiązania \mathbf{u} istnieje czas T , taki że $W(\mathbf{u}(t)) \leq M/\alpha + \varepsilon$ dla $t > T$, czyli każde rozwiązanie po skończonym czasie wejdzie do wnętrza kuli o równaniu $W(x, y, z) = (x^2 + y^2 + (z - (\sigma + r))^2)/2 \leq M/\alpha + \varepsilon$. Ponadto na brzegu takiej kuli mamy $W'(\mathbf{u}) \leq -\alpha\varepsilon < 0$, więc trajektorie w jej wnętrzu nigdy jej nie opuszczają. Kula ta spełnia zatem pierwsze dwa wymagania definicji 6.1 atraktora. Oznacza to, że ona sama bądź jakiś jej podzbiór będzie atraktorem.

By zbadać strukturę tego atraktora sprawdźmy jak zmienia się objętość obszaru w przestrzeni fazowej. O tym w jaki sposób pole wektorowe zmienia (ściska lub rozciąga) infinytezymalny element przestrzeni wokół punktu mówi nam jego dywergencja w tym punkcie. W naszym przypadku mamy

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0. \quad (6.10)$$

Zatem dywergencja jest wszędzie stała i ujemna. Jako że $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, to objętość każdego małego elementu przestrzeni fazowej będzie stale maleć. Dla dowolnego spójnego obszaru V ograniczonego gładką zamkniętą powierzchnią ∂V mamy

$$V'(t) = \iint_{\partial V(t)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{f} dV = -(\sigma + 1 + b) \iiint_{V(t)} dV = -(\sigma + 1 + b)V(t), \quad (6.11)$$

czyli

$$V(t) = V(t_0)e^{-(\sigma+1+b)(t-t_0)}. \quad (6.12)$$

Zatem objętość dowolnego ograniczonego obszaru przestrzeni fazowej maleje do zera, gdy $t \rightarrow \infty$. Oznacza to, że atraktor układu będzie miary (objętości) zero.

Jak wynika z uprzedniej analizy stabilności (wzór (5.26e)), jeśli $r < R(\sigma, b)$, to układ ma dwa stabilne stany stacjonarne $\mathbf{u}_{*\pm}$. Okazuje się, że w większości przypadków prawie wszystkie rozwiązania będą dążyć do tych dwóch punktów (Sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana: Jeśli r jest bliskie, ale nie przekracza wartości krytycznej, to może zaistnieć dziwny atraktor – patrz np. [11]).

Z kolei dla $r > R(\sigma, b)$ wszystkie trzy punkty stacjonarne są niestabilne. Wówczas prawie wszystkie rozwiązania będą dążyć do dziwnego atraktora, zwanego **atraktorem Lorenza**. Rozwiązania wewnątrz atraktora Lorenza zachowują się chaotycznie i przejawiają efekt motyla. Dowód matematyczny istnienia dziwnego atraktora jest dość skomplikowany i nie będziemy go tutaj przedstawiać. Do analizy zachowania rozwiązań posłużą nam symulacje numeryczne.

6.5 Rozwiązania nie dążące do atraktora Lorenza

Dla dowolnych parametrów σ, r, b dla warunków początkowych $\mathbf{u}(0) = (0, 0, z_0)^\top$ mamy

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -bz \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Rozwiązanie ma więc postać

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 e^{-bt} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (6.15)$$

Atraktor Lorenza nie jest więc atraktorem globalnym (ale okazuje się, że jest on prawie globalny). Rozwiązania te są również przykładem rozwiązań zbiegających do niestabilnego punktu stacjonarnego wzdłuż wektora własnego odpowiadającego ujemnej wartości własnej.

7 Symulacje i wykresy

Symulacje układu Lorenza przeprowadzoną za pomocą schematu numerycznego RK4 w języku Python (NumPy). Wykresy narysowano za pomocą biblioteki Matplotlib.

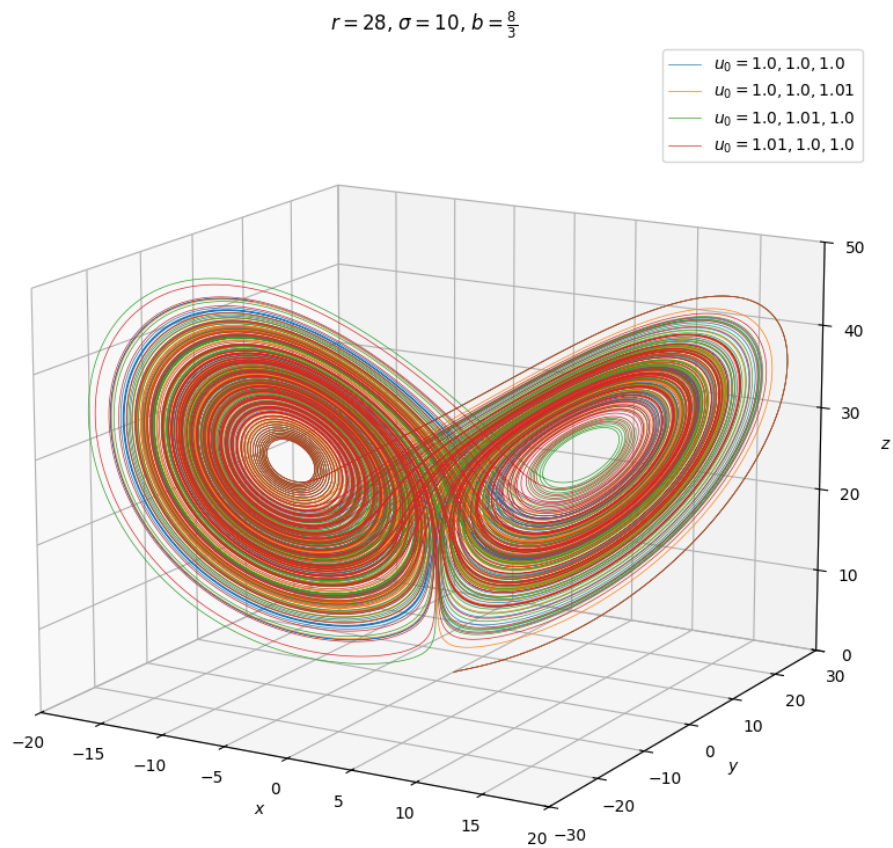
7.1 Klasyczne warunki początkowe

Lorenz w swojej pracy [1] przyjął wartości parametrów $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Wówczas zachodzi $R(10, 8/3) = 470/19 \approx 24.74$, czyli r przekracza wartość krytyczną, więc występuje dziwny atraktor, wewnątrz którego rozwiązania zachowują się chaotycznie. Stany stacjonarne odpowiadające stałej konwekcji to $\mathbf{u}_{*\pm} = (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)^\top$. Rysunek 1 przedstawia rozwiązania dla bliskich warunków początkowych. Widać, że się one rozbiegają (efekt motyla). Rysunek 2 pokazuje atraktor z różnych perspektyw. Rysunek 3 pokazuje wykresy rozwiązań w zależności od czasu.

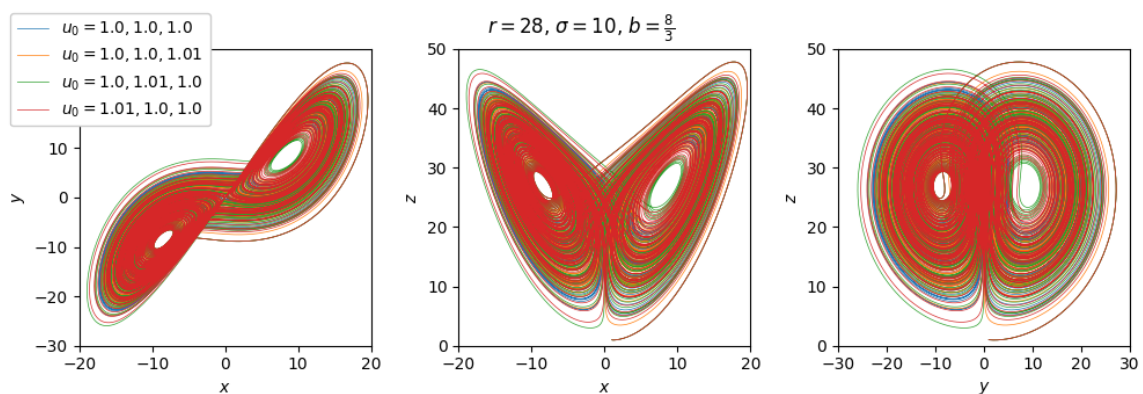
Ogólnie widać, że atraktor składa się z dwóch *skrzydeł*: „dysków” wokół punktów stacjonarnych. W pobliżu punktów stacjonarnych rozwiązania zachowują się w sposób uporządkowany: oddalają się od nich po spiralach. Jednak przy pewnej odległości są przerzucane na drugie skrzydło w sposób dość nieprzewidywalny.

7.2 Zmiana parametrów

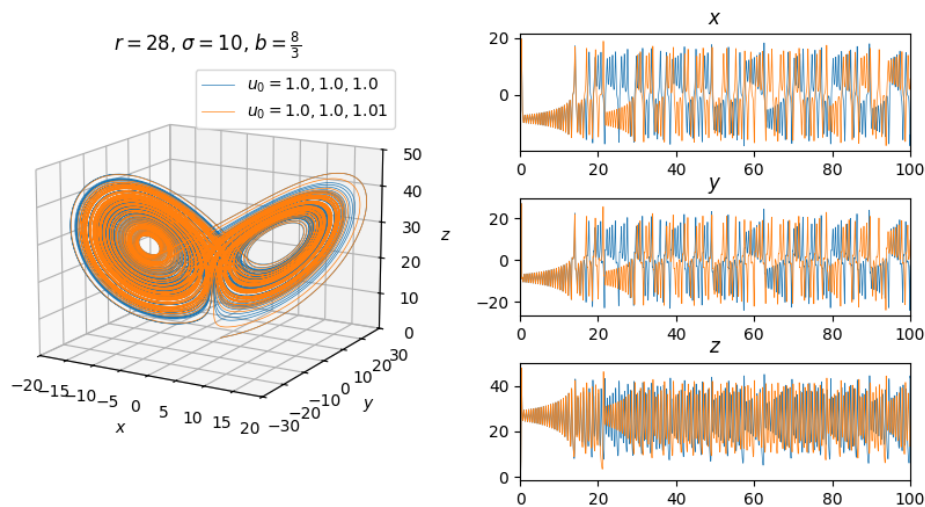
Rysunek 4 przedstawia symulację układu przy $r = 0.5 < 1$. Widać, że wszystkie rozwiązania dążą do globalnego atraktora – punktu $\mathbf{0}$. Rysunek 5 pokazuje zachowanie się układu dla różnych wartości $r \in \{5, 10, 20, 28\}$, przy warunkach klasycznych $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Mamy $R(10, 8/3) = 470/19 \approx 24.74$, więc dla pierwszych trzech wartości r rozwiązania zbiegają do dwóch punktów stacjonarnych. Rozwiązania początkowo zachowują się



Rysunek 1: Symulacje rozwiązań układu Lorenza przy parametrach $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$ dla czterech bliskich warunków początkowych. Widać efekt motyla: Rozwiązania rozbiegają się.



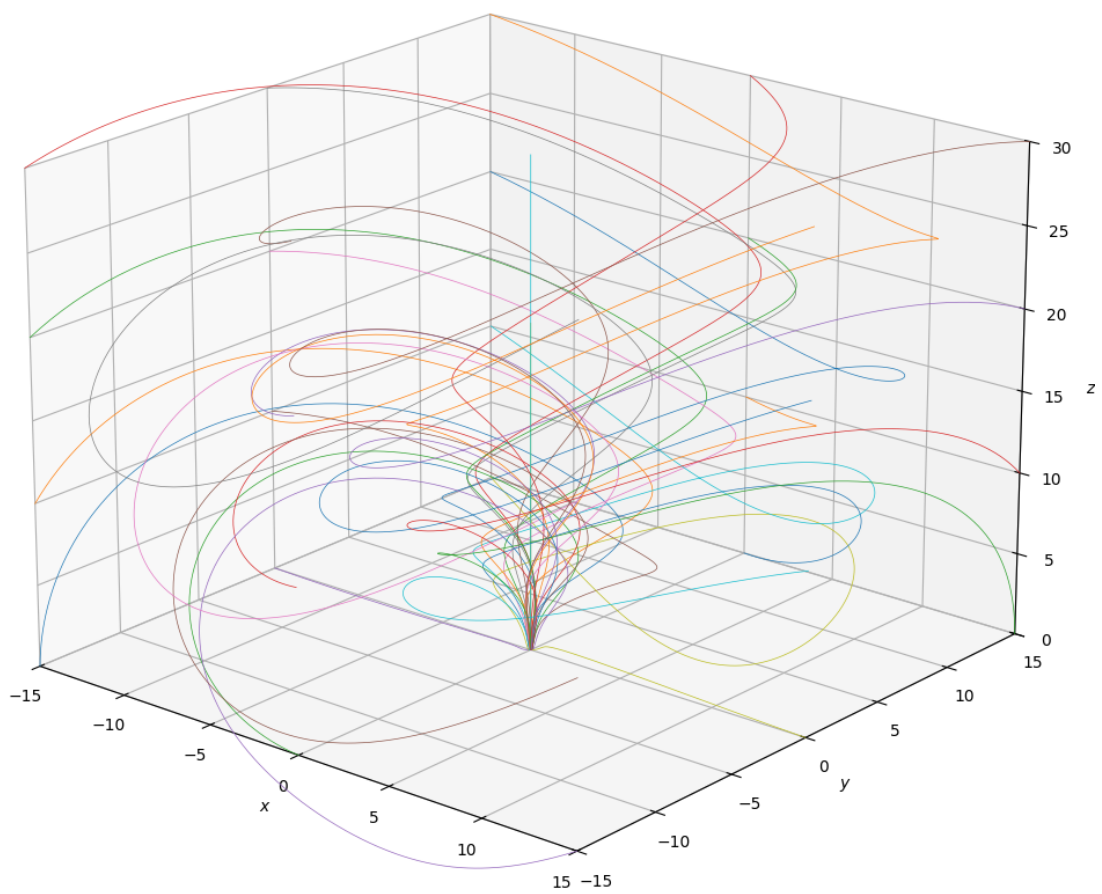
Rysunek 2: Rzuty wykresu 1 wzdłuż trzech osi układu współrzędnych.



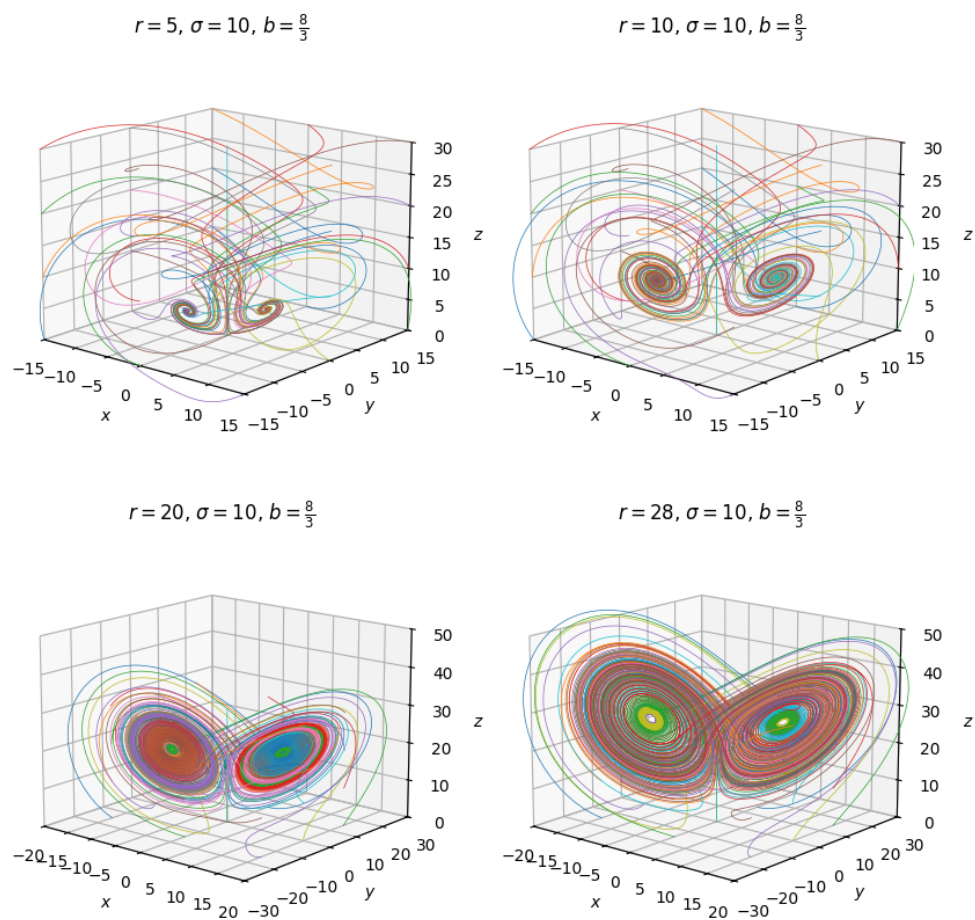
Rysunek 3: Symulacje rozwiązań układu Lorenza przy parametrach $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ dla dwóch bliskich warunków początkowych oraz wykresy ich trzech współrzędnych w zależności od czasu.

chaotycznie, ale ostatecznie zbiegają do stabilnych punktów stacjonarnych (tzw. **chaos przejściowy**). Widać, że zbliżają się one po spiralach. Gdy r przekracza wartość $R(\sigma, b)$ punkty stacjonarne stają się niestabilne, i rozwiązania oddalają się od nich po spiralach, aż są przerzucane na drugie skrzydło atraktora, co jest powtarzane w nieskończoność w sposób chaotyczny.

$$r = 0.5, \sigma = 10, b = \frac{8}{3}$$



Rysunek 4: Symulacje rozwiązań układu Lorentza przy parametrach $r = 0.5$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Wszystkie rozwiązania dążą do punktu $\mathbf{0}$.



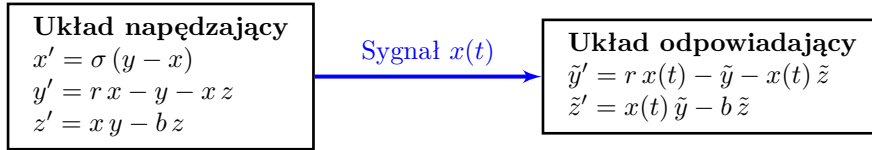
Rysunek 5: Symulacje rozwiązań układu Lorenza przy parametrach $\sigma = 10$, $b = 8/3$ przy różnych wartościach parametru r . W pierwszych trzech przypadkach $r < R(\sigma, b)$, więc rozwiązania dążą do dwóch punktów stacjonarnych. W czwartym $r > R(\sigma, b)$, więc rozwiązania zachowują się chaotycznie.

8 Synchronizacja dwóch układów

Układ Lorenza, mimo swojej chaotycznej natury i wynikającej z niej wrażliwości na warunki początkowe, posiada zdolność do synchronizacji z innym układem. Proces ten zachodzi, gdy część zmiennych stanu układu odpowiadającego zostanie zastąpiona sygnałem pochodzącym z układu napędzającego.

8.1 Motywacja dla synchronizacji układów chaotycznych

Pod koniec lat 80. XX wieku fizycy Louis Pecora i Thomas Carroll poszukiwali praktycznych zastosowań chaosu. Zaproponowali oni architekturę, w której dwa układy chaotyczne są połączone w relacji Master-Slave (napędzający-odpowiadający) [12]. W tej konfiguracji układ odpowiadający jest sterowany sygnałem zewnętrznym, który zastępuje jedną z jego wewnętrznych zmiennych.



Rysunek 6: Schemat blokowy synchronizacji Master-Slave sygnałem $x(t)$.

Rozważmy dwa identyczne układy (o tych samych parametrach). Układ przesyłający informację nazywamy **układem napędzającym** (Master), a układ otrzymujący informację **układem odpowiadającym** (Slave). Przez synchronizację rozumiemy sytuację, w której trajektoria układu odpowiadającego zbiega do trajektorii układu napędzającego: $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)| = 0$. Można zatem stwierdzić, że zsynchronizowany układ odpowiadający staje się asymptotycznie stabilny względem ruchu układu napędzającego.

8.2 Zasada działania synchronizacji

Rozważmy autonomiczny układ równań dany wzorem:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \tag{8.1}$$

Dzielimy go na dwa podukłady: napędzający \mathbf{v} oraz odpowiadający \mathbf{w} , takie że $\mathbf{v}' = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ oraz $\mathbf{w}' = \mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Następnie tworzymy kopię podukładu \mathbf{w} , oznaczoną jako $\tilde{\mathbf{w}}$, sterowaną sygnałem $\mathbf{v}(t)$ z pierwszego układu:

$$\tilde{\mathbf{w}}' = \mathbf{h}(\mathbf{v}(t), \tilde{\mathbf{w}}) \tag{8.2}$$

Ewolucja błędu synchronizacji $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}$ dla nieskończenie małych zaburzeń opisana jest przez układ wariacyjny:

$$\boldsymbol{\xi}' = D_{\mathbf{w}} \mathbf{h}(\mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t)) \boldsymbol{\xi} \tag{8.3}$$

gdzie $D_{\mathbf{w}} \mathbf{h}$ jest macierzą Jacobiego podukładu \mathbf{w} względem zmiennych tego podukładu. Dla układu Lorenza sprzężonego zmienną x , macierz Jacobiego podukładu (\tilde{y}, \tilde{z}) przyjmuje postać:

$$J_o = \begin{pmatrix} -1 & -x(t) \\ x(t) & -b \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

Równanie wariacyjne można przedstawić w formie macierzowej:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -x(t) \\ x(t) & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

Rozwiązanie tego układu pozwala na wyznaczenie **warunkowych wykładników Lapunowa** (Conditional Lyapunov Exponents, CLE).

Definicja 8.1 Wykładnikiem Lapunowa nazywamy miarę określającą średnie tempo wykładniczej zbieżności lub rozbieżności bliskich trajektorii. Wyraża się go wzorem:

$$\lambda_w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \tag{8.6}$$

Układowi o n wymiarach odpowiada spektrum składające się z n wykładników Lapunowa. Podukład uznajemy za stabilny (zdolny do synchronizacji) tylko wtedy, gdy wszystkie jego warunkowe wykładniki Lapunowa są ujemne.

8.3 Wyznaczanie wykładników Lapunowa metodą numeryczną

Do numerycznego wyznaczania wykładników Lapunowa stosuje się najczęściej algorytmy Wolfa (1985) lub Benettina [13] (1980). Metoda Wolfa służy głównie do estymacji największego wykładnika z szeregów czasowych, gdy postać równań nie jest znana. Ze względu na jawność układu, zastosowano **algorytm Benettina**. Pozwala on na wyznaczenie pełnego spektrum wykładników poprzez ortonormalizację bazy wektorów w przestrzeni stycznej.

Procedura obliczeniowa przebiega następująco:

1. Inicjalizacja ortonormalnej bazy wektorów V (np. macierz jednostkowa).
2. Jednoczesne całkowanie układu nieliniowego oraz układu wariacyjnego metodą numeryczną (np. RK4).
3. Regularna ortonormalizacja wektorów bazy (rozkład QR) w celu uniknięcia ich numerycznego złania się i ucieczki do nieskończoności.
4. Akumulacja logarytmów współczynników wzrostu.
5. Uśrednienie wyników po czasie całkowania T_{\max} .

8.4 Analiza stabilności układu odpowiadającego

Dotychczas rozważaliśmy układy sprzężone zmienną x . Próbę synchronizacji możemy również przeprowadzić przesyłając informację ze zmiennej y lub z w analogiczny do opisanego powyżej sposób.

W celu określenia zdolności do synchronizacji zbadano znaki warunkowych wykładników Lapunowa dla trzech różnych konfiguracji sprzężenia:

Tabela 1: Warunkowe Wykładniki Lapunowa dla układu Lorenza ($\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$).

Zmienna napędzająca	Podukład	λ_{w1}	λ_{w2}	Synchronizacja
x	(y, z)	-1.7975	-1.8692	TAK
y	(x, z)	-2.6674	-9.9993	TAK
z	(x, y)	+0.0031	-11.0030	NIE

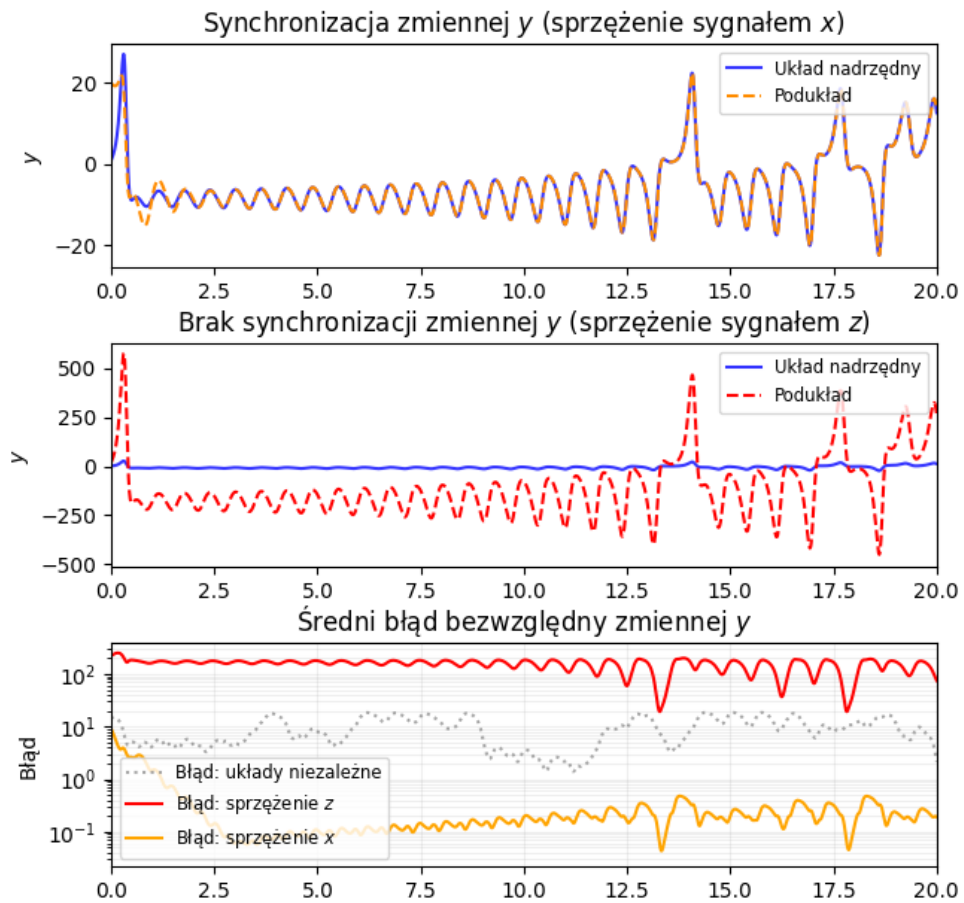
W przypadkach sprzężenia zmienną x lub y , oba CLE są ujemne, co gwarantuje stabilność różnicowości synchronizacji. W przypadku sprzężenia zmienną z , dodatni wykładnik λ_{w1} uniemożliwia zbieżność trajektorii.

8.5 Analiza rozwiązań zsynchronizowanych układów Lorenza

Rysunek 7 przedstawia symulację zsynchronizowanych układów Lorenza dla bliskich warunków początkowych. Przyjmujemy konfigurację ze sprzężeniem zmienną x i podukładem (y, z) oraz ze sprzężeniem zmienną z i podukładem (x, y) i zbadamy zachowanie zmiennej y w obu przypadkach.

8.6 Zastosowania zsynchronizowanych układów Lorenza

Najważniejszym zastosowaniem synchronizacji chaosu jest **maskowanie chaotyczne** (chaos masking) w bezpiecznej komunikacji. Sygnał informacyjny jest dodawany do sygnału napędzającego, stając się nieczytelny szumem dla osób trzecich. Tylko odbiorca dysponujący identycznym układem odpowiadającym (Slave) może odtworzyć komponent chaotyczny i odzyskać wiadomość poprzez odjęcie zsynchronizowanego sygnału od otrzymanego sumarycznego przebiegu.



Rysunek 7: Wykresy ewolucji rozwiązań w czasie zmiennej y dla układów Lorenza o warunkach początkowych $(x, y, z) = (1.0, 1.0, 1.0)$, $(\tilde{y}, \tilde{z}) = (20.0, 20.0)$ zsynchronizowanych sprzężonych zmienną x i niesynchronizowanych sprzężonych zmienną z . W układach zsynchronizowanych rozwiązania znacznie oddalone zbiegają bardzo szybko. W układach sprzężonych zmienną x różnica rozwiązań rośnie znacznie szybciej niż w układach niesprzężonych.

Bibliografia

Źródła

- [1] Edward N. Lorenz. „Deterministic Nonperiodic Flow”. W: *Journal of Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), s. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml.
- [2] Barry Saltzman. „Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem—I”. W: *Journal of Atmospheric Sciences* 19.4 (1962), s. 329–341. DOI: 10.1175/1520-0469(1962)019<0329:FafCAA>2.0.CO;2. URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/19/4/1520-0469_1962_019_0329_fafcaa_2_0_co_2.xml.
- [3] Kevin M. Cuomo i Alan V. Oppenheim. „Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications”. W: *Phys. Rev. Lett.* 71 (1 lip. 1993), s. 65–68. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.65. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.65>.
- [4] Hermann Haken. „Analogy between higher instabilities in fluids and lasers”. W: *Physics Letters A* 53.1 (1975), s. 77–78. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(75\)90353-9](https://doi.org/10.1016/0375-9601(75)90353-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960175903539>.
- [5] Edgar Knobloch. „Chaos in the segmented disc dynamo”. W: *Physics Letters A* 82.9 (1981), s. 439–440. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(81\)90274-7](https://doi.org/10.1016/0375-9601(81)90274-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960181902747>.
- [6] Douglas Poland. „Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations”. W: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 65.1 (1993), s. 86–99. ISSN: 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90006-M](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90006-M). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899390006M>.
- [7] Alexandru Dinu. „Singularity, Observability, and Independence: Unveiling Lorenz’s Cryptographic Potential”. W: *Mathematics* 12.18 (2024). ISSN: 2227-7390. DOI: 10.3390/math12182798. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/18/2798>.
- [8] Yi-Fang Chang. „Neural Synergetics, Lorenz Model of Brain, Soliton-Chaos Double Solutions and Physical Neurobiology”. W: *NeuroQuantology* 11 (mar. 2012). DOI: 10.14704/nq.2013.11.1.601.
- [9] Edward J. Routh. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. Cambridge, UK: Macmillan i Company, 1877.
- [10] Joseph P. LaSalle. „Some Extensions of Liapunov’s Second Method”. W: *IRE Transactions on Circuit Theory* 7.4 (1960), s. 520–527. DOI: 10.1109/TCT.1960.1086720. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1086720>.
- [11] Nikolay Kuznetsov i in. „The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension”. W: *Nonlinear Dynamics* 102 (paź. 2020), s. 1–20. DOI: 10.1007/s11071-020-05856-4. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-020-05856-4>.
- [12] Louis M. Pecora i Thomas L. Carroll. „Synchronization in chaotic systems”. W: *Phys. Rev. Lett.* 64 (8 lut. 1990), s. 821–824. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.821>.
- [13] Giancarlo Benettin i in. „Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems - A method for computing all of them. I - Theory. II - Numerical application”. W: *Meccanica* 15 (mar. 1980), s. 21–30. DOI: 10.1007/BF02128236.

Literatura

- [14] Edward N. Lorenz. *The Essence Of Chaos*. Jessie and John Danz lectures. Taylor & Francis, 1995. ISBN: 9780295975146. URL: <https://books.google.pl/books?id=j5Ub6sMCo0sC>.
- [15] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press, 1994. ISBN: 978-0367026509.