1. Niech $G = S(n)$ będzie grupą permutacji n elementów. Element $x \in G$ zapiszemy jako iloczyn cykli rozłącznych. Dla dowolnego ustalonego $g \in G$ jak wygląda zapis gxg^{-1} jako iloczyn cykli rozłącznych. Wywnioskuj stąd opis klas sprzężoności w G. Ile klas sprzężoności ma $S(8)$?

2. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech V będzie przestrzenią funkcji zespolonych na zbiorze $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Operator A zadajemy wzorem $(Af)(j) = \exp(2\pi ij/k)f(j)$ gdzie i jest jednostką urojoną. Opisz grupę G generowaną przez A. Opisz podprzestrzenie niezmiennicze dla G.

3. Niech k, V i A będą jak wyżej. Operator B definujemy wzorem $(Bf)(j) = f(j+1)$ dla $j < k-1$ i $(Bf)(k-1) = f(0)$ (innymi słowy dodawanie indeksów jest modulo k). Opisz grupę H generowaną przez A i B. Uzasadnij że H nie ma nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych.

4. Niech $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ gdzie $c_n = 1$, $c_i \in \mathbb{Q}$ i $c_0 \neq 0$ będzie wielomianem nierozkładalnym nad $\mathbb{Q}$, tzn. wielomianu p nie da się zapisać jako produktu wielomianów niższych stopni o współczynikach wymiernych. W $V = \mathbb{Q}^n$ rozpatrujemy bazę $e_0, e_i, \dots e_{n-1}$. Operator A na V zadajemy wzorami $Ae_i = e_{i+1}$ dla $i < n-1$ i $Ae_{n-1} = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i$. Uzasadnij że A odpowiada mnożeniu przez x w przestrzeni $\mathbb{Q}[x]/(p)$ gdzie $(p) = \mathbb{Q}[x]p$ jest ideałem generowanym przez p. Uzasadnij że A jest odwracalny i że wzór $\rho(n) = A^n$ zadaje reprezentację $\mathbb{Z}$ na V. Uzasadnij że ta reprezentacja nie ma nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych. Uzasadnij że zastępując w konstrukcji V liczby wymierne przez zespolone otrzymamy reprezentację $\mathbb{Z}$ na przestrzeni zespolonej wymiaru n i opisz podprzestrzenie niemiennicze tak otrzymanej reprezentacji.

5. Niech operator A na $V = \mathbb{Q}^n$ będzie zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reprezentację ρ grupy addytywnej $\mathbb{Z}$ definiujemy wzorem $\rho(n) = A^n$. Uzasadnij że operator zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

należy do obrazu reprezentacji. Wywnioskuj stąd opis podprzestrzeni niezmienniczych dla ρ.

6. Niech ρ będzie reprezentacją $\mathbb{Z}$ na przestrzeni wektorowej V. Niech $A = \rho(1)$. Uzasadnij że jeśli wektory $v, Av, A^2v, \dots$ są liniowo niezależne to V zawiera kopię reprezentacji regularnej. Wywnioskuj stąd że dowolna reprezentacja $\mathbb{Z}$ albo zawiera reprezentację skończenie wymiarową albo kopię reprezentacji regularnej. Wyjaśnij co się dzieje gdy V to przestrzeń zespolonych wielomianów trzygonometrycznych, tzn. V składa się z funkcji postaci $\sum c_k \exp(kix)$ gdzie suma jest skończona, k całkowite, i jest jednoską urojoną, x jest zmienną zaś $\rho(1)$ to operator mnożenia przez $\exp(ix)$.

7. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem k i niech R będzie podpierścieniem pierścienia operatorów liniowych na V zwierającym jedynkę (tzn. operator identycznościowy). Uzasadnij że istnieje grupa G i reprezentacja ρ grupy G na V taka że R jest obrazem pierścienia grupowego. Czy jako G zawsze można wziąść grupę skończoną?

8. Niech R będzie zbiorem operatorów różniczkowych postaci $\sum c_{j,k} x^j \partial_x^k$ gdzie suma jest skończona zaś j i k są liczbami naturalnymi. Uzasadnij że R jest pierścieniem z naturalymi działaniami, że można naturalnie zdefiniować działanie elementów R na wielomianach i że otrzymany w ten sposób moduł jest prosty.

9 Grupa wolna. Niech S będzie zbiorem symboli. Dla każdego $s \in S$ przez s^{-1} oznaczymy symbol ze zbioru S^{-1} rozłącznego z S. Skończony ciąg elementów zbioru $A = S \cup S^{-1}$ nazywamy słowem. Mówimy że słowo jest zredukowane jeśli nie występuje w nim na sąsiednich pozycjach para ss^{-1} lub para $s^{-1}s$. Słowo które nie jest zredukowane możemy zredukować usuwając pary jak wyżej. Na zbiorze słów zredukowanych wprowadzamy mnożenie w ten sposób że najpierw piszemy po kolei dwa słowa, a potem redukujemy wynik. Jako jedynkę bierzemy słowo puste. Uzasadnij że w ten sposób otrzymamy grupę. Uzasadnij że jeśli S ma co najmniej dwa elementy to klasy sprzężoności elementów różnych od jedynki są nieskończone.

10. Niech G będzie zbiorem zespolonych funkcji mierzalnych g na odcinku

$[0,1]$, takich że $|g(x)| = 1$ z mnożeniem punktowym jako działaniem, tzn. $(g_1 \cdot g_2)(x) = g_1(x)g_2(x)$. Niech $H = L^2([0,1])$ będzie przestrzenią klas równoważności względem równości prawie wszędzie funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku $[0,1]$. Definiujemy reprezentację ρ grupy G na H przy pomocy mnożenia punktowego, tzn. wzorem $(gv)(x) = g(x)v(x)$. Na H mamy normę L^2 i zadaną przez tą normę topologię. Uzasadnij że jeśli $A \subset [0,1]$ jest podzbiorem mierzalnym to

$$H_A = \{f : |\{x \in [0,1] - A : f(x) \neq 0\}| = 0\}$$

jest domkniętą podprzestrzenią niezmienniczą H. Ponadto każda domknięta podprzestrzeń niezmiennicza H jest takiej postaci.