1. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Opisz charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych w przestrzeniach skończenie wymiarowych skończonej grupy cyklicznej.

2. Uzasadnij że grupa skończona jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy każda jej reprezentacja nieprzywiedlna nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki nie dzielącej $|G|$ jest jednowymiarowa.

3. Grupa permutacji $S(10)$ zbioru 10-cio elementowego $A = [1, \ldots, 10]$ w naturnaly sposób działa na $A \times A$. Niech λ oznacza reprezentację na $C(A)$ (gdzie $C(A)$ to funkcje zespolone na A) taką że $\lambda(g)\delta_a = \delta_{g(a)}$. Niech η oznacza reprezentację na $C(A \times A)$ zbudowaną podobnie lecz używając działanie na $A \times A$. Uzasadnij że η jest równoważne $\lambda \otimes \lambda$.

4. Uzasadnij że reprezentacja regularna to reprezentacja indukowana z trywialnej reprezentacji podgrupy trywialnej $S = \{e\}$.

5. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, λ będzie dowolną reprezentacją skończenie wymiarową G, g elementem G, zaś l dodatnią liczbą całkowitą taką że $g^l = e$. Niech χ oznacza charakter λ. Uzasadnij że $\chi(g)$ jest sumą l-tych pierwiastków z 1. Wywnioskuj stąd że jeśli $m > 0$ jest liczbą taką że $g^m = e$ dla dowolnego $g \in G$ to χ przyjjmuje wartości w ciele $k[e_m]$ gdzie k jest ciałem prostym (tzn. k to $\mathbb{Q}$ jeśli K jest charakterystyki 0 lub k to $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ gdy K jest charakterystyki p) zaś e_m jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia m.

6. Uzasadnij że jeśli K jest ciałem liczb zespolonych, G jest skończona, χ jest charakterem reprezentacji skończenie wymiarowej to $\chi(g^{-1}) = \bar{\chi}(g)$ gdzie $\bar{\chi}$ oznacza sprzężenie zespolone.

7. Uzasadnij że jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte, G jest skończona i charakterystyka k nie dzieli $|G|$ to wymiar centrum $k[G]$ jest równy liczbie klas izomorfizmu $k[G]$-modułów prostych.

8. Uzasadnij że jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte i charakterystyki 0 zaś G jest skończona, to charakter reprezentacji χ jest charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej wtedy i tylko wtedy gdy $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. Wywnioskuj stąd że produkt tensorowy reprezentacji nieprzywiedlnych G i H jest reprezentacją nieprzywiedlną $G \times H$.

9. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętem charakterystyki nie dzielącej $|G|$, A będzie podgrupą przemienną G, M będzie reprezentacją nieprzywiedlną G na przestrzeni wektorowej nad k. Uzasadnij że $\dim_k(M) \leq \frac{|G|}{|A|}$. Wskazówka: M jest zawarte w reprezentacji indukowanej z A.

10. Niech ciało K będzie rozszerzeniem k i charakterystyka k nie dzieli mocy grupy G. Niech M i N będą $k[G]$ modułami które są skończnie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad k. Uzasadnij że jeśli M i N są izomorficzne po rozszerzeniu skalarów do K to są izomorficzne jako $k[G]$ moduły. Wywnioskuj stąd że jeśli k jest charakterystyki 0 to $k[G]$ moduły są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy mają równe charaktery.

11. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki nie dzielącej $|G|$. Niech Z oznacza centrum $k[G]$. Niech $A \in Z$ będzie elementem takim że jego działanie na Z diagonalizuje się tak że wszyskie wartości własne są różne. Uzasadnij że wektory własne są wielokrotnościami idempotentów e_i związanych z $k[G]$ modułami prostymi. Uzasadnij że A jak wyżej istnieje.

Uwaga: Oznacza to że znając strukturę Z można wyznaczyć e_i a więc i charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych bez dodatkowych informacji o $k[G]$.

12. Niech A będzie skończeną grupą abelową traktowaną jako $\mathbb{Z}$-moduł. Również $\mathbb{Q}$ traktujemy jako $\mathbb{Z}$-moduł. Uzasadnij że $\mathbb{Q} \otimes A = \{0\}$.

13. Dla przestrzeni wektorowych M i N przez $\mathrm{Hom}(M, N)$ oznaczymy przestrzeń odwzorowań liniowych z M w N. Niech M i N będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad k i niech M^* oznacza $\mathrm{Hom}(M, k)$. Uzasadnij że $\mathrm{Hom}(M, N)$ jest naturalnie izomorficzne z $M^* \otimes N$.

14. Niech M będzie modułem wielomianów nad pierścieniem przemiennym R zmiennych $x_1, \ldots, x_l$ zaś N będzie będzie modułem wielomianów zmiennych $y_1, \ldots, y_m$. Uzasadnij że $M \otimes N$ jest naturalnie izomorficzne z modułem wielomianów zmiennych $x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m$.

15. Niech M_1 i M_2 będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{C}$ z dodatnio określonymi hermitowskimi iloczynami skalarnymi $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$. Uzasadnij że wzór

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_1 \langle x_2, y_2 \rangle_2$$

zadaje na $M_1 \otimes M_2$ dodatnio określony hermitowski iloczyn skalarny. Innymi słowy, produkt tensorowy przestrzeni unitarnych ma naturalną strukturę przestrzeni unitarnej.