

Rozważamy reprezentacje nad dostatecznie dużym (zawierającym wszystkie potrzebne wielkości algebraiczne) ciałem charakterystyki względnie pierwszej z mocami grup.

1. Uzasadnij że grupa $SL(2, q)$ naturalnie działa na przestrzeni $q + 1$ elementowej. Opisz rozkład otrzymanej dzięki temu działaniu reprezentacji nieprzywiedlnej. Uzasadnij że dla $q > 2$ działanie jest przez permutacje parzyste. Opisz dokładniej strukturę $SL(2, q)$ dla $q \in \{3, 4, 5\}$.

Wskazówka: przestrzeń rzutowa.

2. Uzasadnij że każda reprezentacja nieprzywiedlna produktu grup jest iloczynem tensorowym reprezentacji.

Wskazówka: użyj rozkładu reprezentacji regularnej.

3. Niech N będzie abelowym dzielnikiem normalnym w G zaś P podgrupą dopełniczą, tzn. $P \cap N = \{e\}$ i $PN = G$. Niech χ będzie charakterem N . Niech M oznacza podgrupę P składającą się z elementów takich że $\chi(g^{-1}ng) = \chi(n)$ dla wszystkich $n \in N$. Niech θ będzie reprezentacją nieprzywiedlną M . Uzasadnij że reprezentacja indukowana z produktu tensorowego $\chi \otimes \theta$ (który tu redukuje się do zwykłego mnożenia) jest nieprzywiedlna. Uzasadnij że każda reprezentacja nieprzywiedlna G jest takiej postaci. Jak to się ma do grupy M z notatek o $SL(2, q)$? Opisz z tego punktu widzenie reprezentacje grupy dihedralnej (gdzie $b^{-1}ab = a^{-1}$, $b^2 = e$, $a^k = e$). Opisz reprezentacje grupy gdzie N to przestrzeń \mathbb{Z}_5^3 , zaś P to permutacje wektorów bazy w \mathbb{Z}_5^3 (Z_p oznacza ciało 5 elementowe które traktujemy jako grupa z dodawaniem).

4. Opisz reprezentacje grupy symetrii sześciangu.

5. Niech U będzie podgrupą cykliczną $q + 1$ elementową w $SL(2, q)$ (w notatkach jest uzasadnienie że taka podgrupa istnieje). Niech π będzie elementem $k[SL(2, q)]$ który ma wartość $\frac{1}{q+1}$ na U i 0 poza tym. Uzasadnij że π jest idempotentem, tzn $\pi^2 = \pi$. Użyj podany w notatkach opis reprezentacji do wyznaczenia reprezentacji w których obraz π jest niezerowy.

6. Jak się zmieniają wyniki o $SL(2, q)$ dla q będącego potęgą 2?