1. Niech $G = Z_2$ będzie grupą dwuelementową. G działa na $\mathbb{Q}^2$ zamieniając wektory bazowe e_1 i e_2. Niech M_1 będzie $\mathbb{Z}$ modułem generowanym przez e_1 i e_2. Niech M_2 będzie $\mathbb{Z}$ modułem generowanym przez $e_1 + e_2$ i $e_1 - e_2$. Uzasadnij że otrzymane w ten sposób reprezentacje G nad $\mathbb{Z}$ nie są równoważne.

Wskazówka: Użyj redukcję modulo 2 i rozważaj reprezentacje nad Z_2.

2. Niech ρ będzie reprezentacją grupy G na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{Q}$. Uzasadnij że V zawiera skończenie generowalny $\mathbb{Z}$ moduł który generuje V nad $\mathbb{Q}$. Wywnioskuj stąd że G ma co najmniej jedną reprezentację nad $\mathbb{Z}$ która po rozszerzeniu skalarów do $\mathbb{Q}$ daje reprezentację równoważną z ρ.

Wskazówka: Rozważ orbitę bazy V.

3. Niech G_m będzie podzbiorem grupy $SL(n, \mathbb{Z})$ składającym się z macierzy postaci $I + mA$ gdzie I to macierz identycznościowa, m to dodatnia liczba całkowita, zaś A to macierz całkowitoliczbowa taka że suma ma wyznacznik 1. Uzasadnij że G_m jest podgrupą normalną w $SL(n, \mathbb{Z})$. Uzasadnij że $G_{p^k}/G_{p^{k+1}}$ gdzie p jest liczbą pierwszą jest grupą przemienną. Wywnioskuj stąd że przekrój skończonej podgrupy $H \subset SL(n, \mathbb{Z})$ z G_p jest grupą rozwiązalną.

4. Uzasadnij że izometria $\mathbb{R}^3$ ma jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą. Wywnioskuj stąd że taka izometria jest obrotem lub złożeniem obrotu z odbiciem wzgledem osi obrotu lub się diagonalizuje. Uzasadnij że jeśli izometria g przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma ślad będący liczbą całkowitą, to $g^m = I$ dla pewnego $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

5. Uzasadnij że obraz grupy krystalograficznej G przez działanie na $\mathbb{Z}^3/(2\mathbb{Z}^3)$ jest podgrupą $SL(3, 2)$ o mocy co najwyżej 24. Wywnioskuj stąd że obraz G jest grupą rozwiązalną.

Wskazówka: Moc $SL(3, 2)$ dzieli się przez 7.

Uwaga: Zadania 3 i 5 pokazują że iloraz G przez $\mathbb{Z}^3$ jest grupą rozwiązalną.

6. Uzasadnij że naturalne działanie grupy symetrii trójkąta na przestrzeni wymiaru 2 jest reprezentacją indukowaną z reprezentacji jednowymiarowej podgrupy jeśli reprezentacje rozważamy nad $\mathbb{C}$. Uzasadnij że nie jest to reprezentacja indukowana z reprezentacji nad $\mathbb{R}$.

7. Uzasadnij że reprezentacja wymiaru 3 grupy $SL(2,5)$ nie jest indukowana z reprezentacji jednowymiarowej.

Wskazówka: Użyj opis klas sprzężoności i charakterów by pokazać że ta reprezentacja gdyby była indukowana to z podgrupy zawierającej element typu N i element typu $\lambda \in F(q)$ i charakter reprezentacji podgrupy byłby nietrywialny na tych elementach. Użyj to by pokazać że taka podgrupa byłaby przemienna i uzyskać sprzeczność z opisem elementów komutujących z N.

8. Uzasadnij że jeśli G jest grupą skończoną działającą na $\mathbb{R}^n$ to istnieje wielościan wypukły W taki że G jest podgrupą grupy symetrii W. W można wybrać tak by G działało tranzytywnie na wierzchołkach W. Uzasadnij na przykładzie że jest nieskończenie wiele klas podobieństwa możliwych W.

9. W grupie $S(4)$ wyznacz mnożenie na centum $K[G]$, tzn. zapisz iloczyn klas sprzężoności jako sumę klas sprzężoności z odpowiednimi krotnościami.

10. Niech P będzie półgrupą przemienną. Uzasadnij że każda skończenie wymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna P nad ciałem algebraicznie domkniętym k (tzn. moduł prosty nad $k[P]$) jest jednowymiarowa.

11. $\{0,1\}$ traktujemy jako półgrupę z jedynką P z mnożeniem jako dzialaniem (1 jest jedynką półgrupy). Znajdź reprezentacje nieprzywiedlne P. Uzasadnij że reprezentacja regularna P rozkłada się na sumę reprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwaga: Przyjmujemy tu że w reprezentacji jedynka półgrupy ma przejść na operator identycznościowy.