12. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki p i niech G będzie grupą mocy p^k. Uzasadnij że każdy $k[G]$ moduł prosty jest trywialny.

Wskazówka: Dla grupy przemiennej opisz rozwiązania równania $x^p = 1$ z $x \in k$. Dla grupy nieprzemiennej przyjmij za znane że G ma nietrywialne centrum.

13. Niech k będzie ciałem charakterystyki p i niech G będzie grupą mocy p^k. Uzasadnij że reprezentacja trywialna występuje w $k[G]$ z krotnością 1. Uzasadnij że $k[G]$ jest $k[G]$ modułem nierozkładalnym (tzn. nie daje się przedstawić w postaci sumy prostej nietrywialnych podmodułów).

Wskazówka: Druga część to wniosek z pierwszej i poprzedniego zadania.

14. Niech H będzie podgrupą G i niech k będzie pierścieniem przemiennym. Uzasadnij że $k[G]$ jest $k[H]$ modułem wolnym (tzn. jest sumą prostą modułów izomorficznych z $k[H]$).

15. Niech G będzie grupą skończoną zaś k ciałem. Uzasadnij że $k[G]$ jest skończoną sumą prostą $k[G]$ modułów nierozkładalnych (tzn. takich które nie da się zapisać jako nietrywialna suma prosta).

16. Niech k będzie ciałem charakterystyki p zaś G grupą mocy mp^k gdzie m jest względnie pierwsze z p. Uzasadnij że jeśli M jest składnikiem prostym $k[G]$ to M ma wymiar podzielny przez p^k.

Wskazówka: Przyjmij za znane istnienie podgrupy Sylowa, tzn. podgrupy H mocy p^k i użyj wyniki poprzednich zadań.

17. Niech G będzie grupą skończoną zaś $g \in G$ elementem rzędu mp^k (tzn. $g^{mp^k} = e$) gdzie p jest liczbą pierwszą zaś m jest względnie pierwsze z p. Uzasadnij że g można zapisać w postaci $g = uw$ gdzie u jest rzędu m, w jest rzędu p^k i $uw = wu$. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nad ciałem charakterystyki p. Uzasadnij że $\chi(g) = \chi(u)$.

Wskazówka: $1 = am+bp^k$ z całkowitymi a i b. Rozpisz g^1. W reprezentacji zapisz element w postaci Jordana.

18. Niech k będzie ciałem zaś ρ będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wektorowej V nad k. Niech P będzie przestrzenią rzutową otrzymaną z V, tzn. $P = (V - \{0\})/k_*$ gdzie iloraz jest względem działamia grupy multyplikatywej $k_* = k - \{0\}$ ciała k. Innymi słowy P to zbiór prostych przechodzących przez 0 w V. Mając dane przekształcenie liniowe na V w naturalny sposób otrzymujemy przekształcenie P (tak otrzymane przekształcenia nazywamy przekształceniami rzutowymi). Uzasadnij że reprezentacja ρ w naturalny sposób zadaje reprezentację rzutową tzn. homomorfizm z G w grupę przekształceń rzutowych. W takiej sytuacji mówimy że reprezentacja rzutowa jest otrzymana z reprezentacji liniowej. Powiemy że zbiór $U \subset P$ jest podprzestrzenią jeśli U jest obrazem niezerowej podprzestrzeni $W \subset V$ przez przekształcenie ilorazowe. Powiemy że reprezentacja rzutowa na P jest nieprzywiedlna jeśli jedyną podprzestrzenią niezmienniczą jest całe P. Uzasadnij że reprezentacja rzutowa otrzymana z reprezentacji liniowej ρ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy ρ jest nieprzywiedlna.

19. Rozważmy grupę Heisenberga H nad Z_p, tzn. grupę gdzie mnożenie zadane jest wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_1 y_2)$$

gdzie współrzędne są z pierścienia Z_p reszt modulo p. Niech C będzie centrum H. Uzasadnij że H ma wierną reprezentację nieprzywiedlną nad $\mathbb{C}$ i że ta reprezentacja nie zawiera reprezentacji jednowymiarowych. Uzasadnij że H/C ma reprezentaję przekształeniami rzutowymi taką że nie pochodzi ona z reprezentacji liniowej (tzn. nie jest złożeniem reprezentacji liniowej z odwzorowaniem ilorazowym z grupy przekształceń liniowych w grupę przekształceń rzutowych).

20. Bazując na podanym opisie sprawdź że $SL(2,5)$ ma reprezentację wymiaru 2, zaś dla $G = SL(2,5)/\{I, -I\}$ najmniejszy wymiar reprezentacji nietrywialnej to 3. Wywnioskuj stąd że istnieje homomorfizm z G w przekształcenia rzutowe przestrzeni dwuwymiarowej (reprezentacja rzutowa), który nie pochodzi od reprezentacji liniowej.

Komentarz: $SL(2,5)$ to tak zwane nakrycie uniwersalne G, w szczególności każda reprezentacja rzutowa G pochodzi z reprezentacji liniowej $SL(2,5)$.

21. Niech ρ będzie nieprzywiedlną reprezentacją grupy G na $V = \mathbb{C}^n$ i niech H będzie abelowym dzielnikiem normalnym w G. Zakładamy że reprezentacja jest wierna. Uzasadnij że albo ρ jest indukowana z pewnej podgrupy, albo H jest podgrupą centrum G.

Wskazówka: Rozważ rozkład ρ obciętego do H.

22. Niech H będzie grupą Heisenberga z zadania 19 z $p = 4$. Uzasadnij że najmniejszy wymiar wiernej reprezentacji H nad $\mathbb{R}$ to 8. Podaj jawnie wierną reprezentację H wymiaru 4 nad ciałem Z_5.

23. Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą półprostą nad ciałem algebraicznie domkniętym k. Niech V i W będą modułami nad A które są skończnie wymiarowe jako przestrzenie nad k. Niech M_i będą reprezentantami klas modułów prostych nad A. Niech l_i i n_i oznaczają krotność M_i w V i W odpowiednio. Uzasadnij że $\mathrm{Hom}(V, W)$ jest przestrzenią wektorową nad k wymiaru $\sum l_i n_i$.

24. Bazując na tym że grupa alternująca A_5 ma 60 elementów i 5 klas sprzężoności, na twierdzeniu Wedderburna, na tym że wymiar reprezentacji dzieli rząd grupy i wiedząc o reprezentacji trywialnej uzasadnij że wymiary reprezentacji A_5 to $1, 3, 3, 4, 5$.

25. Niech G będzie grupą skończoną. Uzasadnij że jeśli $g \neq g^{-1}$ a klasa sprzężoności g równa się klasie sprzężoności g^{-1} to moc tej klasy jest parzysta. Uzasadnij że jeśli grupa G ma moc nieparzystą to istnieje g taki że klasa sprzężoności g jest różna od kasy sprzężoności g^{-1}. Wywnioskuj stąd że na G istnieje charakter nad $\mathbb{C}$ który przyjmuje choć w jednym punkcie wartość nie będącą liczbą rzeczywistą.

Wskazówka: W ostatniej części użyj twierdzenie Artina z wykładów 6 i 7.