1. Niech G będzie grupą Heisenberga, tzn. G to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem:

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1))$$

Uzasadnij że miara Lebesque'a jest dwustronnie niezmiennicza.

2. Niech G to będzie $\mathbb{R}^2$ z mnożeniem zadanym wzorem:

$$(s_1, x_1)(s_2, x_2) = (s_1 + s_2, \exp(s_2)x_1 + x_2)$$

Uzasadnij że Lebesque'a jest niezmiennicza na przesunięcia lewostronne. Znajdź miarę niezmienniczą na przesunięcia prawostronne.

3. Całkowitoliczbowa grupa Heisenberga to $\mathbb{Z}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 - (x_1y_2))$$

Niech $V = L^2(\mathbb{Z})$. Na V zadajemy reprezentację wzorem

$$(\rho((x, y, z))v)(u) = \exp(ia(yu + z))v(u - x)$$

gdzie a jest ustaloną rzeczywistą liczbą niewymierną. Sprawdź że jest to reprezentacja i że jest ona nieprzywiedlna.

4. Dla grupy z zadania 2 zadajemy reprezentację na $L^2(\mathbb{R})$ wzorem

$$(\rho((s, x))v)(u) = \exp(ix\exp(u - s))v(u - s).$$

Sprawdź że jest to reprezentacja. Uzasadnij że jest ona nieprzywiedlna

5. Grupę izometrii $\mathbb{R}^2$ można zapisać jako zbiór par (z, t) gdzie $z, t \in \mathbb{C}$ i $|z| = 1$. Mnożenie jest zadane wzorem

$$(z_1, t_1)(z_2, t_2) = (z_1z_2, z_2^{-1}t_1 + t_2).$$

Zadajemy reprezentację na $L^2(S)$ gdzie $S = z : |z| = 1$ wzorem

$$\rho((z, t))v(u) = \exp(ia\Re(zt/u))v(u/z)$$

gdzie $a > 0$ zaś $\Re$ oznacza część rzeczywistą. Sprawdź że jest to reprezentacja. Uzasadnij że jest ona nieprzywiedlna

6. Niech G działa na przestrzeni z miarą probabilistyczną M, tzn. dana jest funkcja $m : (G, M) \to M$ taka że dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ i $x \in M$ mamy $m(g_1, m(g_2, x)) = m(g_1 g_2, x)$. Zakładamy że działanie zachowuje miarę, tzn. przy ustalonym $g \in G$ i dowolnym mierzalnym $A \subset M$ mamy

$$|A| = |\{m(g, x) : x \in A\}|.$$

Zadajemy reprezentację G w $L^2(M)$ wzorem

$$\rho(g)v(x) = v(m(g^{-1}, x))$$

Sprawdź że jest to reprezentacja. Uzasadnij że ta reprezentacja zawiera reprezentację trywialną z krotnością 1 wtedy i tylko wtedy gdy działanie G na M jest ergodyczne tzn. wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{g \in G} |A - \{m(g, x) : x \in A\}| = 0$$

implikuje że $A = M$ lub $A = \emptyset$. Sprawdź że gdy a jest liczbą niewymierną, $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}$, zaś $m(g, x) = x - ag$ to powyższy warunek jest spełniony.