Algebry operatorów

Definicja 0.1 *Algebrę A nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ nazywamy algebrą unormowaną jeśli jest ona wyposażona w normę $\|\cdot\|$ taką że z tą normą jest przestrzenią unormowaną i dla dowolnych $x, y \in A$ mamy*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Algebrę unormowaną która jest zupełna w normie nazywamy algebrą Banacha.

Uwaga: Zwykle będziemy rozważać algebry Banacha (czy unormowane) nad liczbami zespolonymi i milcząco zakładać zespolone skalary. W przypadku gdy potrzebne nam będą algebry rzeczywiste napiszemy to jawnie.
Niech G będzie grupą. W algebrze $\mathbb{C}[G]$ wprowadzamy normę wzorem

$$\|\sum a_g \delta_g\| = \sum |a_g|.$$

Wtedy

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$$

czyli z tą normą $\mathbb{C}[G]$ jest algebrą unormowaną (jeśli G jest nieskończona to jest to algebra niezupełna).

Definicja 0.2 *Inwolucją w algebrze A nad $\mathbb{C}$ nazywamy antyliniowy antyautomorfizm o okresie 2, tzn. takie odwzorowanie * że*

$$(xy)^* = y^* x^*,$$

$$(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*,$$

$$(x^*)^* = x.$$

Mówimy wtedy że A jest algebrą z inwolucją, lub krócej że A jest *-algebrą. Jeśli algebra jest unormowana to zwykle będziemy zakładać że $\|a\| = \|a^*\|$.

Na $\mathbb{C}[G]$ wprowadzamy inwolucję wzorem

$$(\sum a_g \delta_g)^* = \sum \bar{a}_g \delta_{g^{-1}}$$

Łatwo sprawdzić że jest to inwolucja i że $\|f^*\| = \|f\|$.

Definicja 0.3 *Reprezentacją algebry A nazywamy lewy A-moduł M. Jeśli A jest *-algebrą, przestrzeń M to przestrzeń Hilberta, A działa przez operatory ograniczone i zachodzi wzór*

$$\rho(a^*) = \rho(a)^*$$

gdzie $\rho(a)v = av$ jest operatorem mnożenia przez a to mówimy że reprezentacja jest *-reprezentacją.

Lemat 0.4 *Istnieje 1-1 odpowiedniość między unitarnymi reprezentacjami G i *-reprezentacjami $\mathbb{C}[G]$.*

Dowód: Wiemy że reprezentacje G są w 1-1 odpowiedniości z $\mathbb{C}[G]$-modułami. Jeśli reprezentacja jest unitarna to wzór

$$\rho(\sum a_g \delta_g) = \sum a_g \rho(g)$$

pokazuje że otrzymamy operatory ograniczone. Ponadto

$$\rho(\sum a_g \delta_g)^* = \sum \bar{a}_g \rho(\delta_g)^* = \sum \bar{a}_g \rho(\delta_{g^{-1}})$$

czyli dla $f = \sum a_g \delta_g$ mamy $\rho(f)^* = \rho(f^*)$. A więc z reprezentacji unitarnej G otrzymamy *-reprezentację $\mathbb{C}[G]$. W drugą stronę, jeśli mamy *-reprezentację $\mathbb{C}[G]$ to

$$\rho(\delta_g)^{-1} = \rho(\delta_{g^{-1}}) = \rho(\delta_g^*) = \rho(\delta_g)^*$$

czyli reprezentacja G działa przez operatory unitarne. □

Definicja 0.5 *Jeśli A jest *-algebrą, ϕ jest funkcjonałem liniowym na A to mówimy że A jest dodatni jeśli $\phi(x^*x) \geq 0$ dla dowolnego $x \in A$.*

Definicja 0.6 *Mówimy że wektor v jest cykliczny dla reprezentacji ρ algebry z jedynką A jeśli $\rho(A)v$ jest gęste w przestrzeni na której jest zdefiniowane ρ. Reprezentacją cykliczną algebry A nazywamy parę (ρ, v) gdzie ρ jest reprezentacją A zaś v jest wektorem cyklicznym dla ρ.*

Lemat 0.7 *Jeśli (ρ, v) jest *-reprezentacją cykliczną *-algebry A z jedynką to funkcjonał*

$$\phi_{\rho,v}(x) = (\rho(x)v, v)$$

jest dodatni na A. Jeśli ψ jest funkcjonałem dodatnim na A to istnieje co najwyżej jedyna z dokładnością do izomorfizmu *-reprezentacja cykliczna (ρ, v) taka że $\psi = \phi_{\rho,v}$. Jeśli dodatkowo A jest unormowana i ψ jest normowo ciągły to taka reprezentacja istnieje. Podobnie, jeśli dla pewnej reprezentacji cyklicznej (θ, z) i wszystkich $x \in A$ mamy $\psi(x^*x) \leq \phi_{\theta,z}(x^*x)$ to istnieje (ρ, v) takie że $\psi = \phi_{\rho,v}$.

Dowód. Jeśli (ρ, v) jest *-reprezentacją cykliczną to

$$\phi_{\rho,v}(x^*x) = (\rho(x^*x)v, v) = (\rho(x)v, \rho(x)v) = \|\rho(x)v\|^2 \geq 0$$

czyli funkcjonal $\phi_{\rho,v}$ jest dodatni. Niech teraz ψ będzie funkcjonałem dodatnim na A. Najpierw zauważmy że jeśli istnieje reprezentacja cykliczna (ρ, v) taka że $\psi = \phi_{\rho,v}$ to jest ona wyznaczona jednoznacznie. Mianowicie na $\rho(A)v$ mamy

$$(xv, yv) = (y^*xv, v) = \psi(y^*x)$$

czyli na $\rho(A)v$ produkt skalarny jest jednoznacznie wyznaczony przez ψ. W szczególności anihilator $I_{\rho,v} = \{x : \rho(x)v = 0\}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez ψ. Jeśli (ρ_i, v_i) dla $i = 1, 2$ są reprezentacjami takimi że $\psi = \phi_{\rho_i, v_i}$ to $\rho_i(A)v$ jest izomorficzne z $A/I_{\rho_i, v_i}$ czyli $\rho_1(A)v$ jest algebraicznie izomorficzne z $\rho_2(A)v$. Na mocy wcześniejszego rachunku są one izometryczne, czyli dostajemy równoważność reprezentacji.

Aby pokazać istnienie na A wprowadzamy iloczyn skalarny wzorem

$$(x, y) = \psi(y^* x).$$

Jako że ψ jest dodatni to ten iloczyn jest dodatnio określony, czyli wprowadza na A strukturę przestrzeni unitarnej. Dzieląc A przez podprzestrzeń wektorów zerowych i uzupełniając otrzymujemy przestrzeń Hilberta V. Dla $x, y \in A$ mamy

$$\|xy\|_V^2 = (xy, xy)_V = (x^* xy, y) \leq \|x^* xy\|_V \|y\|_V.$$

Indukcyjnie

$$\|xy\|_V^2 \leq \|(x^* x)^{2^k} y\|_V^{1/2^k} \|y\|_V^{2-1/2^k}.$$

Jeśli A jest algebrą unormowaną i ψ jest ciągły to

$$\|x\|_V^2 = \psi(x^* x) \leq \|\psi\| \|x^* x\|_A$$

i

$$\|(x^* x)^{2^k} y\|_V \leq \|\psi\|^{1/2} \|((x^* x)^{2^k} y)^* (x^* x)^{2^k} y\|_A^{1/2}$$

$$\leq \|\psi\|^{1/2} (\|(x^* x)^{2^{k+1}}\|_A \|y^*\|_A \|y\|_A)^{1/2} \leq (\|\psi\| \|y^*\|_A \|y\|_A)^{1/2} \|x^* x\|_A^{2^k}.$$

Teraz biorąc $M = \|\psi\| \|y^*\|_A \|y\|_A$ mamy

$$\|xy\|_V^2 \leq M^{1/2^{k+1}} \|x^* x\|_A \|y\|_V^{2-1/2^k}$$

Biorąc granicę przy k dążącym do nieskończoności mamy

$$\|xy\|_V^2 \leq \|x^* x\|_A \|y\|_V^2$$

czyli mnożenie przez x zadaje operator ograniczony w normie V z normą co najwyżej $\|x^* x\|_A^{1/2}$. Rozszerzając ten operator przez ciągłość na V dostajemy operator $\rho(x)$. Oczywiście ρ jest reprezentacją. Z definicji iloczynu skalarnego na V, dla $x, y, z \in A$ mamy

$$(y, \rho(x^*) z)_V = \psi(z^* xy) = (\rho(x) y, z)_V.$$

Przez ciągłość ta równość zachowuje się dla dowolnych $y, z \in V$, czyli $\rho(x^*) = \rho(x)^*$, czyli ρ jest *-reprezentacją. Niech v będzie obrazem 1 w V. Mamy

$$(\rho(x) v, v) = \psi(1x1) = \psi(x)$$

czyli $\psi = \phi_{\rho, v}$.

Aby pokazać ostatnią część lematu zauważmy że jeśli dla dowolnego $x \in A$ mamy $\psi(x^* x) \leq \phi_{\theta, z}(x^* x)$ to dla $x, y \in A$

$$\|(x^* x)^{2^k} y\|_V^2 = \psi(((x^* x)^{2^k} y)^* (x^* x)^{2^k} y) \leq \phi_{\theta, z}(((x^* x)^{2^k} y)^* (x^* x)^{2^k} y)$$

$$= \|\theta((x^*x)^{2^k}y)z\|^2 \leq \|\theta(x^*x)\|^{2^{k+1}}\|\theta(y)\|^2\|z\|^2$$

czyli z $M = \|\theta(y)\|\|z\|$ mamy

$$\|xy\|_V^2 \leq M^{1/2^k}\|\theta(x^*x)\|\|y\|^{2-1/2^{k+1}}$$

co znowu daje

$$\|xy\|_V \leq \|\theta(x^*x)\|^{1/2}\|y\|_V$$

i tak jak w przypadku unormowanym mnożenie przez x daje operator ograniczony. Reszta dowodu nie zależy od tego czy A jest unormowana. □

Lemat 0.8 *Jeśli A jest *-algebrą, ϕ, ψ_1, ψ_2 są funkcjonałami dodatnimi na A, $\phi = \psi_1 + \psi_2$, to reprezentacja cykliczna odpowiadająca ϕ jest izomorficzna z podreprezentcją sumy prostej reprezentacji (ρ_i, V_i, ξ_i) odpowiadających ψ_1 i ψ_2. Co więcej, $\eta = (\xi_1, \xi_2) \in V_1 \oplus V_2$ spełnia $\phi(x) = ((\rho_1 \oplus \rho_2)(x)\eta, \eta)$. Reprezentacja cykliczna odpowiadająca ϕ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbb{R}\phi$ jest promieniem ekstremalnym w stożku funkcjonałów dodatnich na A.*

Dowód: Jeśli ϕ pochodzi z reprezentacji, to na mocy ostatniej częsci Lematu 0.7 również ψ_i pochodzą z reprezentacji. Wzór z η to prosty rachunek:

$$((\rho_1 \oplus \rho_2)(x)\eta, \eta) = (\rho_1(x)\xi_1, \xi_1) + (\rho_2(x)\xi_2, \xi_2)$$
$$= \psi_1(x) + \psi_2(x) = \phi(x).$$

Z jednoznaczności reprezentacji cyklicznej wynika że reprezentacja odpowiadająca ϕ jest izomorficzna z podreprezentacją sumy prostej $\rho_1 \oplus \rho_2$ generowną przez η. Rzuty z V na V_i dają niezerowo operatory splatające reprezentację odpowiadająca ϕ z reprezentajami odpowiadającymi ψ_i. Jeśli reprezentacja odpowiadająca ϕ jest nieprzywiedlna, to te operatory splatające są wielokrotnościami izometrii, więc ψ_i są proporcjonalne do ϕ, czyli $\mathbb{R}\phi$ jest promieniem ekstermalnym w stożku funkcjonałów dodatnich na A. Jeśli reprezentacja (ρ, v) odpowiadająca ϕ jest przywiedlna to jest sumą prostą dwu swoich podreprezentacji. Wtedy ϕ jest sumą funkcjonałów dodatnich ψ_i odpowiadających podreprezentacjom. Gdyby ψ_i były dodatnimi wielokrotnościami ϕ to wtedy rzuty z V na V_i byłyby wielokrotnościami izometrii, skąd by wymikało że oryginalna reprezentacja nie jest cykliczna. A więc ψ_i nie są dodatnimi wielokrotnościami ϕ, czyli $\mathbb{R}\phi$ nie jest promieniem ekstermalnym w stożku funkcjonałów dodatnich na A. □

Definicja 0.9 *Powiemy że funkcja ϕ na G jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy funkcjonał ψ zadany wzorem*

$$\psi(\sum a_g\delta_g) = \sum a_g\phi(g)$$

jest dodatni na $\mathbb{C}[G]$.

Lemat 0.10 *Jeśli ϕ jest funkcją dodatnio określoną na G to dla dowolnego $g \in G$ mamy*

$$|\phi(g)| \leq \phi(e),$$
$$\phi(g^{-1}) = \bar{\phi}(g).$$

Dowód: Zauważmy najpierw że $\phi(e)$ jest rzeczywiste dodatnie, bo dla $f = \delta_e$ mamy $f^* f = \delta_e$ i $\psi(f^* f) = \phi(e)$, a więc faktycznie $\phi(e)$ jest rzeczywiste dodatnie. Niech $f = \delta_e + s\delta_g$. Wtedy $f^* = \delta_e + \bar{s}\delta_{g^{-1}}$ i

$$\begin{aligned} f^* f &= \delta_e + s\bar{s}\delta_g\delta_{g^{-1}} + s\delta_g + \bar{s}\delta_{g^{-1}} \\ &= (1 + |s|^2)\delta_e + s\delta_g \bar{s}\delta_{g^{-1}} \end{aligned}$$

czyli

$$\psi(f^* f) = (1 + |s|^2)\phi(e) + s\phi(g) + \bar{s}\phi(g^{-1}).$$

Dla dowolnego zespolonego s prawa strona jest rzeczywista, a więc skoro $\phi(e)$ jest rzeczywiste to

$$s\phi(g) + \bar{s}\phi(g^{-1})$$

jest rzeczywiste. Biorąc rzeczywiste s widać że jest to możliwe tylko wtedy gdy

$$\Im(\phi(g)) = -\Im(\phi(g^{-1}))$$

gdzie $\Im$ oznacza część urojoną. Podobnie, biorąc urojone s widać że

$$\Re(\phi(g)) = \Re(\phi(g^{-1}))$$

gdzie $\Re$ oznacza część rzeczywistą. Razem daje to

$$\phi(g) = \bar{\phi}(g^{-1}).$$

Teraz bierzemy z takie że $z\phi(g) = |\phi(g)|$. Podstawiając $s = zt$ do wzoru na $\psi(f^* f)$ i uwzględniając otrzymaną równość mamy

$$\psi(f^* f) = (1 + |t|^2)\phi(e) + 2t|\phi(g)|$$

Dla rzeczywistego t część rzeczywista prawa strona jest trójmianem kwadratowym od t, czyli gdy jest dodatnia to wyróżnik trójmianu jest ujemny:

$$0 \geq \Delta = (2|\phi(g)|)^2 - 4\phi(e)^2$$

czyli

$$\phi(e)^2 \geq |\phi(g)|^2.$$

Jako że $\phi(e)$ jest dodatnie daje to wynik. $\square$

Lemat 0.11 *Wzór $\phi(g) = (\rho(g)v, v)$ zadaje 1-1 odpowiedniość między zbiorem funkcji dodanio określonych na G i zbiorem cyklicznych reprezentacji unitarnych G. Reprezentacja jest jest słabo rozdzielnie ciągła wtedy i tylko wtedy gdy ϕ jest ciągła.*

Dowód: Zauważny najpierw że na mocy Lematu 0.10 funkcja dodatnio określna jest ograniczona, a więc zadaje funkcjonał normowo ciągły na $\mathbb{C}[G]$. Teraz pierwsza część wynika z Lematu 0.7 i Lematu 0.4. Pozosteje pokazać część o ciągłości. Lecz ϕ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy dowolne elementy macierzowe $(\rho(g)u, w)$ są ciągłe. Mianowicie dla $u = fv$ i $w = hv$ mamy

$$(\rho(g)u, w) = (\rho(h^*\delta_g f)v, v)$$

co jest kombinacją liniową przesunięć ϕ. Unitarność ρ oznacza że ciągłość $(\rho(g)u, w)$ z gęstego zbioru u, w przenosi się na dowolne u, w. Ciągłość $(\rho(g)u, w)$ oznacza słabą rozdzielną ciągłość reprezentacji. $\square$

Naszym celem jest teraz rozkład *-reprezentacji grupy lokalnie zwartej G na składniki nieprzywiedlne. Idea jest prosta: chcemy przedstawić dowolny funkcjonał dodatni jako całkę z funkcjonałów ekstremalnych. Jednakże są trudności techniczne. Przy tym jest naturalne że są trudności, bo nie wszystkie grupy mają reprezentacje nieprzywiedlne. Dlatego będziemy pracować z algebrą $L^1(G)$ (która niejako automatycznie implikuje lokalną zwartość G). Dla uproszczenia będziemy zakładać że G jest ośrodkowa i metryzowalna.
Aby łatwo zdefiniować ważne pojęcia potrzebujemy całek funkcji wektorowych. Bez dowodu przyjmiemy fakt niżej:
Fakt. Niech W będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Dla funkcji o wartościach w W istnieje teoria całkowania anologiczna do teori całki Lebesque'a funkcji rzeczywistych. W szczególnośći jeśli f jest mierzalna o wartościach w W (tzn. przeciwobrazy kul są mierzalne) to $\|f\|$ jest mierzalna. Jeśli $\|f\|$ jest całkowalna to istnieje całka z f i dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego u na W funkcja $x \mapsto \langle f(x), u\rangle$ jest mierzalna i

$$\langle \int f(x), u\rangle = \int \langle f(x), u\rangle.$$

Zachodzi twierzenie Lebesque'a o dominowej zbieżności.
Używając ten fakt możemy zdefiniować działanie (splot) w $L^1(G)$ wzorem

$$f \star h = \int f(g) L_g h$$

gdzie $(L_g h)(x) = h(g^{-1}x)$. Można pokazać że splot jest łączny. Ponadto w $L^1(G)$ można zdefiniować inwolucję, mianowicie, istnieje funkcja m taka że dla dowolnego $f \in L^1(G)$ mamy

$$\int f(x) = \int m(x) f(x^{-1}).$$

Teraz defuniujemy

$$f^*(x) = m(x)\bar{f}(x^{-1}).$$

Można sprawdzić że jest to inwolucja w $L^1(G)$.
W $L^1(G)$ istnieje jedynka aproksymatywna, tzn. taka rodzina funkcji u_n że $\|u_n\| = 1$ i dla dowolnego $f \in L^1(G)$ mamy

$$u_n f \to f$$

gdy n dąży do nieskończoności.
Mówimy że podprzestrzeń W reprezentacji $L^1(G)$ jest zerowa jeśli $fv = 0$ dla dowolnego $f \in L^1(G)$ i $v \in W$.
Jeśli ρ jest ciągłą reprezentacją G to dla $f \in L^1(G)$ definiujemy

$$\rho(f) = \int f(g)\rho(g)$$

Ten wzór zadaje *-reprezentację $L^1(G)$.

Lemat 0.12 *Powyższy wzór zadaje 1-1 odpowiedniość między ciągłymi reprezentacjami unitarnymi G i *-reprezentacjami $L^1(G)$ bez podprzestrzeni zerowych*

Dowód. (szkic) Mając daną reprezentację $L^1(G)$ musimy otrzymać reprezentację G. Używając jedynkę aproksymatywną u_n definujemy

$$\rho(g)w = \lim \rho(\delta_g u_n)w.$$

Dla $w = \rho(f)v$ mamy

$$\rho(g)w = \lim \rho(\delta_g u_n)\rho(f)v = \lim \rho(\delta_g u_n f)v = \rho(\delta_g f)v$$

czyli granica istnieje dla w takiej postaci. Niech $V = \{\rho(f)v\}$. Dopełnienie ortogonalne V jest podprzestrzenią zerową dla $L^1(G)$, a więc założenia jest trywialne, czyli V jest gęsta. A więc mamy zbieżność na zbiorze gęstym. Z ograniczoności norm oznacza to że granica istnieje. Podobnie jako że reprezentacja regularna na L^1 jest ciągła to $\rho(g)w$ jest ciągłe dla $w \in V$, czyli otrzymana reprezentacja jest ciągła. Łatwo sprawdzić że całkowanie tak otrzymanej reprezentacjio G z powrotem daje reprezentację $L^1(G)$ od której zaczeliśmy. □

Lemat 0.13 *Ciągłe funkjonały dodatnie ψ na $L^1(G)$ są postaci*

$$\psi(f) = \int f(g)\phi(g)$$

gdzie ϕ jest ciągłą funkcją dodatnio określoną na G.

Dowód: Funkcjonały dodatnie na $L^1(G)$ odpowiadają reprezentacjom cyklicznym $L^1(G)$ te ciągłym reprezentacjom cyklicznym G te zaś ciągłym funkcjom dodatnio określonym na G. Łatwo sprawdzić że odpowiedniość jest dana przez wskazany wzór. $\square$

Uwaga: Z analizy funkcjonalnej wiadomo że funkcjonały na $L^1(G)$ są zadane przez funkcje ograniczone, być może nieciągłe. Powyższy lemat mówi że funkcje dające funkcjonały dodatnie automatycznie są ciągłe. Tą ciągłość trudno pokazać inaczej niż to zrobiono wyżej.

Lemat 0.14 *Jeśli A jest *-algebrą unormowaną z jedynką to zbiór P funkcjonałów dodatnich na A o normie ograniczonej przez stałą r, jest zbiorem zwartym w *-słabej topologii na A'.*

Dowód: A jest przestrzenią Banacha więc kula B o promieniu r w A' jest zwarta w *-słabej topologii. P jest domkniętym podzbiorem B w *-słabej topologii więc też jest zwarty. $\square$

Lemat 0.15 *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, metryzowalną w sposób zupełny. Zbiór kombinacji wypukłych ciągłych funkcji dodatnio określonych odpowiadających reprezentacjom nieprzywiedlnym jest jest gęsty w * słabej topologi $L^1(G)'$ w zbiorze ciągłych ograniczonych funkcji dodatnio określonych.*

Dowód: Zauważmy najpierw że gdy funkcjonał dodatni jest zadany przez funkcję dodatnio określoną ϕ to jego norma to $\phi(e)$. A więc zbiór ϕ o normie nie przekraczającej r to dokładnie zbiór ϕ takich że $\phi(e) \leq r$. Na mocy poprzedniego lematu ten zbiór jest zwarty w *-słabej topologii, a więc jest domkniętą powłoką wypukłą zbioru swoich punktów ektremalnych. Lecz punkty ektremalne odpowiadają reprezentacjom nieprzywiedlnym (istotne tu jest że ograniczamy tylko $\phi(e)$). $\square$

Lepsza wersja pozwala pokazać że funkcjonał dodatni jest całką z funkcjonałów nieprzywiedlnych, co prowadzi do rozkładu reprezentacji na całkę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.