1 Suma prosta

Sumą prostą potencjalnie nieskończonej rodziny modułów M_α, $\alpha \in I$ jest podzbiór produktu kartezjańskiego M_α, $\alpha \in I$ składający się z tych elementów które mają tylko skończenie wiele składowych różnych od zera. Oznaczenie:

$$M = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$$

Każdy z modułów M_α jest naturalnie izomorficzny z podmodułem M, dlatego zwykle możemy zakładać że $M_\alpha \subset M$. Przy takim założeniu dla $\alpha \neq \beta$ mamy $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$.

Jeśli M jest modułem a M_α, $\alpha \in I$ są podmodułami M to sumą M_α nazywamy najmniejszy podmoduł $N \subset M$ taki że dla każdego $\alpha \in I$ mamy $M_\alpha \subset N$.

Jeśli M jest sumą M_α, $\alpha \in I$ oraz dla $\alpha \neq \beta$ mamy $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$, to wtedy M jest izomorficzny z sumą prostą M_α, $\alpha \in I$. W tej sytuacji dalej będziemy mówić że M jest sumą prostą.

Jeśli M jest sumą prostą $M_1 \oplus M_2$ swoich podmodułów M_1 i M_2 to mówimy że M_2 jest modułem dopełniczym do M_1.

2 Lemat Schura, wersja algebraiczna

Lemat 2.1 *Jeśli M i N są modułami, zaś ϕ jest niezerowym homomorfizmem z M w N to*

- *jeśli M jest prosty to ϕ jest różnowartościowy*
- *jeśli N jest prosty to ϕ jest na*
- *jeśli M i N są proste to ϕ jest izomorfizmem*

Dowód: Jądro $\ker(\phi)$ jest podmodułem M, jeśli M jest prosty to $\ker(\phi) = \{0\}$ lub $\ker(\phi) = M$. W drugim przypadku ϕ byłby zerowy, co jest wykluczone z założenia. A więc gdy M jest prosty to $\ker(\phi) = \{0\}$ czyli ϕ jest różnowartościowy. Podobnie, obraz $\phi(M)$ jest podmodułem N i jeśli N jest prosty to musimy mieć $\phi(M) = N$. □

Lemat 2.2 *Algebra endomorfizmów R-modułu prostego jest algebrą z dzieleniem. Jeśli R jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K to każdy endomorfizm modułu prostego jest operatorem mnożenia przez element K.*

Dowód: Na mocy poprzedniego lematu niezerowe endomorfzmy są odwracalne, co daje pierwszą część. Dla dowodu drugiej części zauważmy że wtedy moduł prosty M jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Endomorfizm ϕ możemy przedstawić przy pomocy macierzy. Wiadomo że nad ciałem algebraicznie domkniętym macierz ma wartość własną λ i odpowiający jej wektor własny v, tzn.

$$\phi v = \lambda v$$

czyli

$$(\phi - \lambda)v = 0$$

Jako że M jest modułem prostym oznacza to że $(\phi - \lambda)w = 0$ dla dowolnego $w \in M$. $\square$

3 Moduły półproste

Najpierw potrzebujemy lemat opisujący moduły proste

Lemat 3.1 *Moduł M jest prosty wtedy i tylko wtedy gdy M jest izomorficzy z modułem postaci R/I gdzie I jest lewostronnym ideałem maksymalnym w R.*

Dowód. Niech I będzie lewostronnym ideałem maksymalnym w R i N będzie podmodułem w R/I. Wtedy $J = \{r \in R : r + I \subset N\}$ jest ideałem lewostronnym zawierającym I. Jako że I jest ideałem maksymalnym oznacza to że $J = R$ lub $J = I$. W pierwszym przypadky mamy $N = R/I$, w drugim $N = \{0\}$, a więc R/I jest modułem prostym. Jeśli M jest modułem prostym i $x \in M$, $x \neq 0$ to przyjmujemy $I = \{r : rx = 0\}$. Wtedy I jest ideałem lewostronnym w R. Zauważmy że Rx jest niezerowym podmodułem w M, czyli $Rx = M$. Innymi słowy M jest izomorficzne z R/I. Jeśli J jest ideałem lewostronnym i $I \subset J$ to Jx jest podmodułem w M, czyli $Jx = M$ lub $Jx = \{0\}$. Jeśli $Jx = M$ to dla dowolnego $r \in R$ istnieje $s \in J$ takie że $rx = sx$, czyli $(r - s)x = 0$, czyli $r - s \in I$. Jako że $I \subset J$ i $s \in J$ oznacza to że $r \in J$, czyli $J = R$. Jeśli $Jx = \{0\}$ to mamy $J = I$. Razem oznacza to że I jest ideałem maksymalnym. $\square$

Lemat 3.2 *Następujące warunki są równoważne*

- *moduł M jest sumą prostą modułów prostych*
- *moduł M jest sumą algebraiczą modułów prostych*
- *każdy podmoduł $V \subset M$ ma podmoduł dopełniczy będący sumą prostą modułów prostych*
- *każdy podmoduł $V \subset M$ ma podmoduł dopełniczy*

Moduł spełniający jeden (a więc i wszystkie) warunki wyżej nazywamy modułem półprostym.

Dowód: Warunek pierwszy jest oczywiście silniejszy niż drugi. Warunek trzeci jest oczywiście silniejszy niż czwarty. Dla $V = \{0\}$ warunek trzeci implikuje warunek pierwszy. Pozostaje pokazać że warunek drugi implikuje trzeci i że warunek czwarty implikuje drugi.

Aby otrzymać warunek trzeci z drugiego rozważmy rodzinę S składającą się z takich modułów N że N jest sumą prostą modułów prostych i $V \cap N = \emptyset$. Na mocy lematu o maksymalnym łańcuchu w rodzinie S istnieje element maksymalny, tzn. taki moduł N że dla każdego modułu prostego $P \subset M$ mamy $P \cap V \neq \emptyset$ lub $P \cap N \neq \emptyset$. W pierwszym przypadku jako że P jest prosty mamy $P = P \cap V$, czyli $P \subset V$. W drugim $P = P \cap N$, czyli $P \subset N$. A więc dla dowolnego modułu prostego P mamy $P \subset V + N$, czyli jako że M jest sumą modułów prostych to $M = V + N$. Z definicji rodziny S wyżej mamy $V \cap N = \emptyset$, czyli M jest sumą prostą V i N. Ponadto N jest sumą prostą modułów prostych co daje warunek trzeci.

Aby zakończyć dowód lematu musimy pokazać że warunek czwarty implikuje drugi.

Zauważmy najpierw że jeśli warunek czwarty jest spełniony dla M i U jest podmodułem M to warunek czwarty zachodzi dla M zastąpionego przez U. Mianowicie, jeśli V jest podmodułem U to jest też podmodułem M. Używając warunek dla M dostajemy moduł N dopełniczy do V w M. Lecz wtedy $N \cap U$ jest modułem dopełniczym do V w U. Pokażemy teraz że dowolny moduł M spełniający warunek czwarty zawiera podmoduł prosty. Mianowicie, bez utraty ogólności można przyjąć że $M = Rx$ dla pewnego $x \in M$. Niech $J = \{r \in R : rx = 0\}$. J jest ideałem lewostronnym w R. Na mocy pewnika wyboru (lematu o maksymalnym łańcuchu) istnieje ideał maksymalny I zawierający J. Wtedy $N = Ix$ jest podmodułem w $M = Rx$ takim że M/N jest izomorficzne z R/I, czyli iloraz jest modułem prostym. Na mocy warunku czwartego istnieje podmoduł P dopełniczy do M, czyli $Rx = P \oplus N$ czyli P jest izomorficzne z Rx/N czyli P jest modułem prostym. Jako że dowolny podmoduł M zawiera moduł prosty to M jest sumą modułów prostych czyli zachodzi warunek drugi. $\square$