1 Lemat o gęstości

Jeśli M jest modułem to endomorfizmy M tworzą pierścień który oznaczymy przez E. M możemy potraktować jako moduł nad E. Dla zaznaczenia że pierścieniem jest E będziemy pisać M_E. Istotny dla nas jest opis endomorfizmów M_E.

Lemat 1.1 *Jeśli M jest modułem półprostym, ϕ jest endomorfizmem M_E zaś $x \in M$ to istnieje $\alpha \in R$ takie że $\phi(x) = \alpha x$.*

Dowód: $N = Rx$ jest podmodułem M, a więc na mocy półprostoty jest składnikiem prostym M. A więc rzut π_N z M na N należy do E. Wtedy

$$\pi_N(\phi(x)) = \phi(\pi_N(x)) = \phi(x)$$

czyli $\phi(x) \in N$, co daje wynik. $\square$

Lemat 1.2 *(Jacobsona o gęstości) Jeśli M jest modułem półprostym, ϕ jest endomorfizmem M_E zaś S jest skończonym podzbiorem M. Wtedy istnieje $\alpha \in R$ takie że dla dowolnego $x \in S$ mamy $\phi(x) = \alpha x$.*

Dowód: Niech $n = |S|$ czyli $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Rozważmy n-krotną sumę prostą M^n. Na M^n rozpatrujemy odwzorowanie $\phi^{(n)}$ zadane wzorem

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\phi(y_1), \ldots, \phi(y_n)).$$

Niech $E^{(n)}$ będzie pierścieniem endomorfizmów M^n. Zauważmy że elementy $E^{(n)}$ to macierze n na n o współczynnikach będących endomorfizmami M. Ze wzoru na $\phi^{(n)}$ wynika więc że $\phi^{(n)}$ jest homomorfizmem M^n jako modułu nad $E^{(n)}$. Moduł M^n jest oczywiście półprosty. Z poprzedniego lematu istnieje element $\alpha \in R$ taki że $\phi^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(x_1, \ldots, x_n)$. Lecz to oznacza że $\phi(x_i) = \alpha x_i$. $\square$

Lemat 1.3 *(Twierdzenie Burnsida) Jeśli M jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem algebraicznie domkniętym k, R jest podpierścieniem pierścienia $\mathrm{End}_k(M)$ który jest przestrzenia wektorową nad k i M jest R-modułem prostym nad k to $R = \mathrm{End}_k(M)$.*

Dowód. Jeśli M jest R-modułem prostym to mocy lematu Schura pierścień E R-endomorfozmów M to k. Niech $f \in \mathrm{End}_k(M) = \mathrm{End}_E(M)$ i niech $x_1, \ldots, x_n$ będzie bazą M jako przetrzeni wektorowej nad k. Wtedy na mocy lematu o gęstości istnieje $\alpha \in R$ takie że $\alpha x_i = f(x_i)$. Jako że $x_1, \ldots, x_n$ jest bazą oznacza to że $\alpha = f$. Jako że f był dowolny oznacza to że $R = \mathrm{End}_k(M)$. $\square$

2 Twierdzenie Wedderburna

R nazywamy pierścieniem półprostym jeśli jest modułem półprostym jako lewy moduł nad sobą.

Lemat 2.1 *Jeśli R jest pierścieniem półprostym to każdy R-moduł jest półprosty.*

Dowód: Dowolny moduł jest sumą prostą modułów postaci Rx. Moduł postaci Rx jest ilorazem R a więc na mocy półprostoty R moduł Rx jest sumą prostą modułów prostych. A więc dowolny R-moduł jest sumą modułów prostych. □

Lemat 2.2 *Jeśli R jest pierścieniem półprostym to istnieje tylko skończenie wiele klas izomorfizmu R-modułów prostych.*

Dowód. Każdy reprezentant klasy izomorfizmu R-modułów prostych jest postaci $M = R/I$ gdzie I jest ideałem maksymalnym. Na mocy półprostoty R ideał I będąc podmodułem ma podmoduł dopełniczy, czyli $R = M \oplus I$. Niech $R = \bigoplus_\alpha M_\alpha$ będzie rozkładem R na sumę prostą modułów prostych. Mamy $1 = x_1 \oplus \cdots \oplus x_l$ gdzie $x_i \in M_{\alpha_i}$. Zauważmy że $M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_l}$ jest podmodułem R takim że $1 \in R$, a więc $R = M_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus M_{\alpha_l}$. Łatwo zauważyć że każdy podmoduł prosty M zawarty w R jest izomorficzny z jednym z M_{α_i}. Mianowicie, dla pewnego i rzutowanie z M na M_{α_i} musi być niezerowe i na mocy lematu Schura jest izomorfizmem. □

Na mocy poprzednich lematów moduł M nad pierścieniem półprostym R ma rozkład postaci

$$M = \oplus_i \oplus_{j=1}^{k_i} M_i$$

gdzie M_i przebiega zbiór reprezentantów klas równoważności R-modułów prostych. Liczby k_i nazywamy krotnościami, tzn. mówimy że moduł M_i występuje w M z krotnością M_i.

Lemat 2.3 *Jeśli R jest algebrą półprostą nad ciałem algebraicznie domkniętym k to istnieją skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe $M_1, \ldots, M_l$ nad k takie że*

$$R \approx \mathrm{End}_k(M_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{End}_k(M_l)$$

Dowód. Niech $M_1, \ldots, M_l$ będą reprezentatami klas izomorfizmu R-modułów prostych. Rozważmy homomorfizm h z R w

$$\tilde{R} = \mathrm{End}_k(M_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{End}_k(M_l).$$

h jest różnowartościowy, bo jeśli α jest w jądrze h to mnożenie przez α daje odwzorowanie zerowe dla dowolnego modułu prostego M_i. Jako że R jest sumą prostą modułów prostych to mnożenie przez α daje odwzorowanie zerowe na R. Lecz $\alpha = \alpha \cdot 1$, czyli wtedy $\alpha = 0$. Na mocy lematu o gęstości h jest na. Mianowicie, na mocy lematu Schura endomorfizmy M_i to ciało k. Dla $i \neq j$ moduły M_i i M_j są nieizomorficze, więc jedyny homomorfizm między nimi jest zerowy. A więc pierścień endomorfizmów E modułu $M_1 \oplus \cdots \oplus M_l$ to suma l-kopii ciała k z działaniami po składowych. Czyli jeśli $\phi \in \tilde{R}$ to ϕ wyznacza endomorfizm $(M_1 \oplus \cdots \oplus M_l)_E$.

A więc, jeśli $x_{i,j}$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, n_l$ są takie że $x_{i,j} \in M_i$ i przy ustalonym i wektory $x_{i,j}$ tworzą bazę M_i i $\phi \in \tilde{R}$ to istnieje $\alpha \in R$ takie że $\alpha x_{i,j} = \phi x_{i,j}$. □

Uwaga. Bez założnia że ciało podstawowe jest algebraicznie domknięte pierścień $E = D_1 \oplus \ldots D_l$ gdzie D_i są algebrami z dzieleniem i w sumie wyżej musimy brać algebry endomorfizmów nad D_i.

Wniosek:
$$\dim_k R = \sum \dim_k(M_i)^2$$
gdzie M_i przebiegają klasy R modułów prostych. Innymi słowy M_i występuje w R z krotnością $\dim_k(M_i)$.

Przykład: Niech $G = S(3)$ (grupa permutacji trzech elementów). G jest izomorficzna z grupą symetrii trójkąta i łatwo sprawdzić że naturalne działanie G na trójkącie daje reprezentację nieprzywiedlną czyli prosty $k[G]$ moduł. Czyli $k[G]$ ma moduł prosty który jest przestrzenią wymiaru 2 nad k. Ponadto G ma dwie reprezentacje wymiaru 1: reprezentację trywialną i znak permutacji. G ma 6 elementów, czyli
$$6 = \dim_k k[G] = 1 + 1 + 2^2$$
czyli podane reprezentacje to wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne G z dokładnością do równoważności.

3 Rozkład kanoniczy reprezentacji

Ustalmy izomorfizm
$$R \approx \mathrm{End}_k(M_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{End}_k(M_l)$$
Niech R_i oznacza $\mathrm{End}_k(M_i)$ zaś e_i element taki że $e_i = 1$ w R_i oraz $e_i = 0$ w R_j dla $j \neq i$. Wtedy
$$1 = \sum e_i$$
oraz
$$e_i^2 = e_i$$
Ponadto e_i leżą w centrum R.

Lemat 3.1 *Jeśli M jest R modułem to e_iM to suma podmodułów M izomorficznych z M_i*

Dowód. Na M_i element e_i działa jako identyczność. Dla $j \neq i$ element e_i działa jako 0. Czyli jeśli N to suma podmodułów M izomorficznych z M_i to e_i działa na N jako identyczność. Jeśli W to moduł dopełniczy do N to W jest izomorficzny z sumą prostą modułów M_j z $j \neq i$. A więc e_i działa na W jako 0. Razem, $e_ix = x$ dla $x \in N$ i $e_ix = 0$ dla $i \in W$. □

Mamy

$$M = \oplus e_iM$$

Daje to rozkład kanoniczny M. W rozkładzie kanonicznym składniki są wyznaczone jednoznacznie. e_i wyżej nazywamy idempotentem związanym z M_i.

Lemat 3.2 *Krotności M_i w M są wyznaczone jednoznacznie*

Dowód: Na mocy poprzedniego lematu mamy

$$e_iM = \oplus_{j=1}^{k_i} M_i$$

i moduł e_iM jest wyznaczony jednoznacznie. Lecz

$$\dim_k(e_iM) = k_i \dim_k(M_i)$$

czyli k_i jest wyznaczone jednoznacznie przez wymiary nad k.

Uwaga: Jeśli $k_i > 1$ to przedstawienie e_iM jako sumy prostej M_i jest bardzo niejednoznaczne.

4 Charaktery

Definicja: Charakterem reprezentacji (modułu) nazywamy odwzorowanie $\phi(a) = \mathrm{Tr}(a)$ gdzie Tr oznacza ślad odwzorowania liniowego.

Inwolucję w $k[G]$ i iloczyn skalarny dla $f = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$ i $h = \sum_{g\in G} b_g\delta_g$ definiujemy

$$\check{f} = \sum_{g\in G} a_g \delta_{g^{-1}}$$

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a_g b_{g^{-1}}$$

Poniżej będziemy zakładać że charakterystyka ciała k nie dzieli $|G|$, dzięki czemu $\langle f, h\rangle$ jest dobrze zdefiniowane.

Lemat 4.1 $\check{f}h = \check{h}\check{f}$

Dowód: Sprawdzamy dla $f = \delta_g$, $h = \delta_u$:

$$\check{fh} = \check{\delta_g \delta_u} = \check{\delta}_{gu} = \delta_{(gu)^{-1}} = \delta_{u^{-1}g^{-1}} = \delta_{u^{-1}}\delta_{g^{-1}}$$
$$= \check{\delta}_u \check{\delta}_g = \check{h}\check{f}.$$

W ogólnym przypadku wynik otrzymujemy przez liniowość. □

Lemat 4.2 *(Wzór Plancherela) Niech λ będzie reprezentacją regularną $k[G]$. Mamy*

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|^2}\mathrm{Tr}(\lambda(fh))$$

Dowód: Dla $f = \delta_g$ i $h = \delta_u$ mamy $\langle f, h\rangle = 0$ dla $g \neq u^{-1}$ i $\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}$ dla $g = u^{-1}$. Podobnie, $f\check{h} = \delta_{gu}$ czyli $\mathrm{Tr}(\lambda(fh)) = 0$ dla $g \neq u^{-1}$ i $\mathrm{Tr}(\lambda(fh)) = |G|$ dla $g = u^{-1}$. A więc równość zachodzi dla elementów bazy czyli przez liniowość równość zachodzi na $k[G]$. □

Lemat 4.3 *Jeśli k jest algebraicznie domknięte, M_i jest $k[G]$ modułem prostym, e_i idempotentem odpowiadającym M_i zaś χ_i charakterem modułu M_i to dla $f \in k[G]$ mamy*

$$\dim_k M_i \chi_i(f) = |G|^2\langle f, e_i\rangle$$

Dowód: Na mocy twierdzenia Wedderburna M_i występuje w reprezentacji regularnej z krotnością $\dim_k M_i$. A więc mamy

$$\dim_k M_i \chi_i(f) = \mathrm{Tr}(\lambda(fe_i)) = |G|^2\langle f, e_i\rangle$$

gdzie ostatnia równość to wzór Plancherela. □

Lemat 4.4 *Jeśli k jest algebraicznie domknięte, zaś M_i jest $k[G]$-modułem prostym to jako funkcja na grupie*

$$\chi_i = \frac{|G|}{\dim_k(M_i)}\check{e}_i$$

gdzie e_i jest idempotentem związanym z M_i. W szczególności charakterystyka K nie dzieli $\dim_k(M_i)$ (zakładamy że charakterystyka K nie dzieli $|G|$).

Dowód. Dla $f = \delta_g$ mamy $|G|\langle f, e_i\rangle = \check{e}_i(g)$. A więc

$$\dim_k(M_i)\chi_i(g) = \dim_k(M_i)\chi_i(f) = |G|^2\langle f, e_i\rangle = |G|\check{e}_i(g)$$

Jako że $|G|\check{e}_i(g)$ jest niezerowe dla pewnego g to wynika stąd że charakterystyka k nie dzieli $\dim_k(M_i)$. $\square$

Wniosek: $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$, gdzie $\delta_{ii} = 1$ zaś $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Mianowicie

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \frac{|G|^2}{\dim_k(M_i) \dim_k(M_j)} \langle \check{e}_i, \check{e}_j \rangle$$

$$= \frac{1}{\dim_k(M_i) \dim_k(M_j)} \mathrm{Tr}(\lambda(e_j\check{e}_i)).$$

Gdy $i \neq j$ to $e_j e_i = 0$ czyli $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$. Dla $i = j$ element $e_i e_i = e_i$ przechodzi na identyczność w $e_i k[G]$ które jest sumą prostą $\dim_k(M_i)$ kopii M_i. A więc $\check{e}_i$ przechodzi na identyczność w $\check{e}_i k[G]$ które ma wymiar $\dim_k(M_i)^2$, czyli $\mathrm{Tr}(\lambda(\check{e}_i)) = \dim_k(M_i)^2$ co daje $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$.

Lemat 4.5 *Jeśli ciało k jest charakterystki 0 to $k[G]$ moduły są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich charaktery są równe. W szczególności gdy ciało k jest algebraicznie domknięte, η jest charakterem $k[G]$ modułu M zaś M_i jest $k[G]$-modułem prostym z charakterem χ_i to M_i występuje w M z krotnością $\langle \chi_i, \eta \rangle$.*